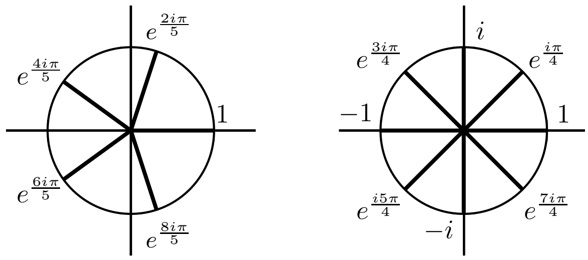
Devoir surveillé 8
Correction

Exercice 1.

1. On remarque que -1 est racine évidente, on calcule alors
$$P = (X^2 + X + 1)(X + 1).$$
Le polynôme $X^2 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$, car discriminant strictement négatif, on a donc la factorisation sur $\mathbb{R}$: $\boxed{P = (X + 1)(X^2 + X + 1).}$
On calcule les racines de $X^2 + X + 1$: $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$.
On a donc sur $\mathbb{C}$: $\boxed{P = (X + 1)(X - e^{i\frac{2\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{2\pi}{3}}).}$
2. Le polynôme Q_n a exactement racines simples : $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.
On a donc sur $\mathbb{C}$: $\boxed{X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}).}$
En traçant le cercle trigonométrique,



on remarque que l'on doit distinguer les cas n entier pair ou impair (Selon que -1 est/ n'est pas racine de Q_n.)
Si n entier pair, on a $n = 2p$ et 2 racines réels -1 et 1 pour Q_n, d'où
$$\boxed{Q_n = (X + 1)(X - 1) \prod_{k=1}^{p-1} (X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right) X + 1).}$$
Si n entier impair, on a $n = 2p + 1$ et une seule racines réel 1 pour Q_n, d'où
$$\boxed{Q_n = (X - 1) \prod_{k=1}^{p} (X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{2p+1}\right) X + 1).}$$
3. (a) En utilisant la factorisation de P, on a
$$\begin{aligned} u_n &= \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (\omega + 1)(\omega - e^{i\frac{2\pi}{3}})(\omega - e^{-i\frac{2\pi}{3}}) \\ &= \left(\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (\omega + 1) \right) \left(\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (\omega - e^{i\frac{2\pi}{3}}) \right) \left(\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (\omega - e^{-i\frac{2\pi}{3}}) \right) \\ &= (-1)^n \left(\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (-1 - \omega) \right) (-1)^n \left(\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (e^{i\frac{2\pi}{3}} - \omega) \right) (-1)^n \left(\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (e^{-i\frac{2\pi}{3}} - \omega) \right). \end{aligned}$$

En utilisant la factorisation de Q_n, on en déduit

$$u_n = (-1)^n((-1)^n - 1)(e^{i\frac{2n\pi}{3}} - 1)(e^{-i\frac{2n\pi}{3}} - 1).$$

En utilisant les formules d'Euler, on a a alors

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^n((-1)^n - 1)e^{i\frac{n\pi}{3}}(e^{i\frac{n\pi}{3}} - e^{-i\frac{n\pi}{3}})e^{-i\frac{n\pi}{3}}(e^{-i\frac{n\pi}{3}} - e^{i\frac{n\pi}{3}}) \\ &= (-1)^n((-1)^n - 1)4\sin^2\left(\frac{n\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

On conclut $\boxed{u_n = 4\cdot((-1)^n - 1)\sin^2\left(\frac{n\pi}{3}\right).}$

(b) Première méthode : on utilise directement la formule de la question précédente et on trouve $((-1)^n = 1$ donc n entier pair) ou ($\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$ donc n multiple de 3).

Deuxième méthode : un produit est nul si et seulement si un des termes du produit est nul, donc si il existe $\omega \in \mathbb{U}_n$ racine de P. Il faut et il suffit donc qu'une des racines de P soit une racine de Q_n.

Il y a 3 cas :

- -1 racine de Q_n soit $(-1)^n = 1$, donc n pair.
- $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ racine de Q_n soit $e^{i\frac{2n\pi}{3}} = 1$. On a alors $\frac{2n\pi}{3} \equiv 0[2\pi]$, soit $n \equiv 0[3]$ et n multiple de 3.
- $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ racine de Q_n soit $e^{-i\frac{2n\pi}{3}} = 1$. On a alors $-\frac{2n\pi}{3} \equiv 0[2\pi]$, soit $n \equiv 0[3]$ et n multiple de 3.

On conclut

$$\boxed{u_n = 0, \text{ si et seulement } n \text{ est multiple de 2 ou 3.}}$$

Problème 1

Etude de u_n et détermination de la limite de la suite $(u_n(x))$ (si elle existe).

1. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on a $u_0(x) = x \geq 0$, puis pour $n > 0$, on a $u_n(x) = \frac{u_{n-1}(x)^2}{n} \geq 0$, car carré d'un nombre réel diviser un entier positif. On conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad u_n(x) \geq 0.}$$

2. Montrons le résultat par récurrence sur n.
Initialisation :
La fonction $u_0 = x \mapsto x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Hérédité :
Supposons qu'à un rang n fixé, u_n est strictement croissante.
La fonction $f_n : x \mapsto \frac{x^2}{n+1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, comme fonction puissance. Donc comme u_n est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par composition de fonctions strictement croissantes, on conclut que $u_{n+1} = f_n \circ u_n$ est strictement croissante. La propriété est donc héréditaire.
On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{la fonction } u_n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

3. Montrons par récurrence sur n que $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Initialisation :
La fonction $u_0 = x \mapsto x$ vérifie clairement la propriété.
Hérédité :
Supposons qu'à un rang n fixé, $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
La fonction $f_n : x \mapsto \frac{x^2}{n+1}$ vérifie $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par composition des limites, on a donc $u_{n+1}(x) = f_n \circ u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
On conclut

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On conclut

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$u_n(x)$	$0 \nearrow +\infty$

4. Comme u_n est continue par composition et strictement croissante, on conclut

$$\boxed{u_n \text{ définit une bijection de } \mathbb{R}^+ \text{ sur } u_n(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+.}$$

5. La fonction $u_0 = x \mapsto x$ est sa propre réciproque est donc dérivable par les règles usuelles sur $\mathbb{R}^+$.
   Si $n > 0$, on remarque $u'_n(x) = \frac{2}{n} u_{n-1}(x) u'_{n-1}(x)$. On en déduit que la dérivée s'annule en x si $u_{n-1}(x) = 0$ ou si $u'_{n-1}(x) = 0$. On en déduit par une récurrence à rédiger que pour $n > 0$, la dérivée de u_n s'annule seulement en 0, donc u_n^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{u_n(0)\} = \mathbb{R}^{+*}$.
   On conclut que

$$\boxed{\text{la fonction réciproque de } u_n \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^+ \text{ si } n = 0 \text{ et sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ si } n > 0.}$$

6. Comme $u_{n+1}(x) = \frac{(u_n(x))^2}{n+1}$, si la suite $(u_n(x))$ converge vers limite finie ℓ, par opérations sur les limites, on obtient $\ell = 0\ell$.
   On conclut que

$$\boxed{\text{si la suite } (u_n(x)) \text{ converge vers limite finie } \ell, \text{ alors nécessairement } \ell = 0.}$$

Bassins d'attraction :

On note

$$E_0 = \left\{ x\,;\, x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \right\} \quad E_\infty = \left\{ x\,;\, x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \right\}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $u_N(x) \leq N + 1$.
   (a) Montrons par récurrence sur n que

$$\forall n \geq N, \quad u_{n+1}(x) \leq u_n(x) \leq n + 1.$$

Initialisation :
Pour $n = N$, on a bien $u_n(x) \leq n + 1$. C'est l'hypothèse. On en déduit donc que $\frac{u_n(x)}{n+1} \leq 1$.
Il en résulte, comme tout est positif et $n \geq 0$, que

$$u_{n+1}(x) = \frac{(u_n(x))^2}{n+1} = u_n(x) \cdot \frac{u_n(x)}{n+1} \leq u_n(x) \leq n + 1.$$

Hérédité :
Supposons qu'à un rang n fixé, on a $u_{n+1}(x) \leq u_n(x) \leq n + 1$.
On en déduit que $u_{n+1}(x) \leq n + 2$, puis $\frac{u_{n+1}(x)}{n+2} \leq 1$
Il en résulte, comme tout est positif et $n \geq 0$, que

$$u_{n+2}(x) = \frac{(u_{n+1n}(x))^2}{n+2} = u_{n+1}(x) \cdot \frac{u_{n+1}(x)}{n+2} \leq u_{n+1}(x) \leq n + 2.$$

La propriété est donc héréditaire.
On résulte donc que

$$\forall n \geq N, \quad u_{n+1}(x) \leq u_n(x) \leq n + 1.$$

On conclut donc que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n(x)) \text{ est décroissante à partir du rang } N.}$$

(b) La suite $(u_n(x))$ est donc décroissante minorée par 0, elle converge vers une limite finie et par la question 6, cette limite est 0.
On conclut que

$$\boxed{x \in E_0.}$$

(c) On remarque $u_0(1) = 1 \leq 0 + 1$, donc la propriété « $u_N(1) \leq N + 1$ » est vérifiée pour $N = 0$. On peut donc conclure que que

$$\boxed{1 \in E_0.}$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, tel que la suite $(u_n(x))$ ne converge pas vers 0.

(a) Le résultat de la question 7 est si il existe N tel que $u_N(x) \leq N + 1$, alors $x \in E_0$. Si $x \notin E_0$, il faut donc nier la propriété et on obtient

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad u_n(x) > N + 1.$$

Par le théorèmes des gendarmes, on peut donc conclure que

$$\boxed{u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

(b) Supposons $x \notin E_0$, grâce à la question précédente, on $u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $x \in E_\infty$. On conclut que

$$\boxed{\mathbb{R}^+ = E_0 \cup E_\infty.}$$

(c) Montrons par récurrence que

$$\forall n \geq 0, \quad u_n(2) \geq n + 2.$$

Initialisation :
Pour $n = 0$, on a bien $u_0(2) = 2 \leq 0 + 2$.
Hérédité :
Supposons qu'à un rang n fixé, on a $u_n(2) \geq n + 2$. On a alors

$$u_{n+1}(2) = \frac{u_n(2)^2}{n+1} \geq \frac{(n+2)^2}{n+1} = n + 3 + \frac{(n+2)^2}{n+1} - n - 3 = n + 3 + \frac{1}{n+1} \geq n + 3.$$

Par le théorèmes des gendarmes, on peut donc conclure que

$$\boxed{u_n(2) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty, \text{ soit } 2 \in E_\infty.}$$

(d) Soit $x > 2$, comme la fonction u_n est croissante, on a

$$u_n(2) \leq u_n(x).$$

Par le théorèmes des gendarmes, on peut donc conclure que $u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, soit $x \notin E_0$. On conclut que

$$\boxed{2 \text{ majore } E_0.}$$

9. E_0 est une partie de $\mathbb{R}$ non vide ($1 \in E_0$) majorée par 2, on conclut

$$\boxed{E_0 \text{ admet une borne sup } \delta.}$$

10. Soit $x > \delta$, on a donc $x \notin E_0$, d'où $x \in E_\infty$. Il en résulte que

$$\forall x > \delta, \quad x \in E_\infty,$$

soit $]\delta, +\infty[\subset E_\infty$.
Soit $x < \delta$, par caractérisation de la borne il existe donc $y \in E_0$ tel que $x < y \leq \delta$, comme u_n est croissante, on a

$$0 \leq u_n(x) \leq u_n(y).$$

Comme $y \in E_0$, on a donc $u_n(y) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Par le théorèmes des gendarmes, on peut donc conclure que $u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et il en résulte

$$\forall x < \delta, \quad x \in E_0,$$

soit $[0, \delta[\subset E_0$.
Il reste donc à savoir si $\delta \in E_0$ ou $\delta \in E_\infty$ et on conclut qu'il y a 2 possibilités :

$$\boxed{(E_0 = [0, \delta[\text{ et } E_\infty = [\delta, +\infty[) \text{ ou } (E_0 = [0, \delta] \text{ et } E_\infty =]\delta, +\infty[)}$$

Justifier que E_0 et E_∞ sont des intervalles. On précisera les différentes possibilités pour E_0 et E_∞ en utilisant δ.

11. Montrons par double implication la propriété :

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons $x_0 \in E_0$:

On a donc $u_n(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par définition de la limite, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geq N$, alors $|u_n(x_0)| \leq \epsilon$.

On peut prendre $\epsilon = \frac{1}{2}$ et on a donc $u_N(x_0) \leq |u_N(x_0)| \leq \frac{1}{2} < 1$.

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons qu'il existe N tel que $u_N(x_0) < 1$

On a alors $u_N(x_0) < 1 \leq N+1$, donc par la question 7.(b)., on conclut $x_0 \in E_0$.

12. Supposons $x_0 \in E_0$, grâce à la question précédente, il existe un rang N tel que $u_N(x_0) < 1$. Comme la fonction u_N est bijective croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, pour $y \in]u_N(x_0), 1[$, il existe $x_1 > x_0$ tel que $u_N(x_1) = y < 1$. Grâce à la question précédente, on $x_1 \in E_0$. Comme $x_1 - x_0 > 0$, en prenant $\epsilon = x_1 - x_0$, on a bien

$$\boxed{\text{existence de } \epsilon > 0 \text{ tel que } x_0 + \epsilon \in E_0.}$$

13. SI $\delta \in E_0$, grâce à la question précédente, il existerait $x_0 \in E_0$, tel que $x_0 > \delta$, ce qui est contradiction avec la définition de la borne sup. On conclut

$$\boxed{\delta \notin E_0, \text{ puis } E_0 = [0, \delta[\text{ et } E_\infty = [\delta, +\infty[}$$

Problème 2

1. **Existence :**

En utilisant la formule de Moivre, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(nx) &= \mathrm{Re}(e^{inx}) \\
&= \mathrm{Re}\left((\cos(x) + i\sin(x))^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (i\sin(x))^k (\cos(x))^{n-k}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}(x)\cos^{n-2k}(x) + i \sum_{0\leq 2k+1\leq n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1}(x)\cos^{n-2k-1}(x)\right) \\
&= \sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin^{2k}(x)\cos^{n-2k}(x) \\
&= \sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-\cos^2(x))^k \cos^{n-2k}(x) = T_n(\cos(x))
\end{aligned}$$

où $T_n = \displaystyle\sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-X^2)^k X^{n-2k}$. Le polynôme ainsi construit convient.

Unicité :

Soit Q_n un polynôme tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le polynôme $T_n - Q_n$ admet $\cos(x)$ comme racine, car

$$(T_n - Q_n)(\cos(x)) = T_n(\cos(x)) - Q_n(\cos(x)) = \cos(nx) - \cos(nx) = 0.$$

Tout élément de $[-1, 1]$ est donc racine de $T_n - Q_n$, il en résulte que ce polynôme admet une infinité de racines, il est donc nul d'où $Q_n = T_n$.

On conclut donc bien à l'existence et l'unicité du polynôme T_n et on a

$$\boxed{T_n = \sum_{0\le 2k\le n} \binom{n}{2k}(-1)^k(1-X^2)^k X^{n-2k}.}$$

2. On remarque que le degré de T_n est majoré par n, car combinaison linéaire des polynômes de degrés n $(1-X^2)^k X^{n-2k}$. On calcule le coefficient a_n du monôme de degré et on trouve

$$a_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k}.$$

Si on introduit $b_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k+1}$. En utilisant le binôme de Newon, on trouve $a_n + b_n = (1+1)^n = 2^n$ et $a_n - b_n = (1-1)^n = 0$. On peut donc conclure :

$$\boxed{T_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ et de coefficient dominant } 2^{n-1}.}$$

3. Comme T_n est degré n, il suffit de déterminer n racines distinctes. Comme $\forall x \in \mathbb{R},\quad Q_n(\cos(x)) = \cos(nx)$, on remarque que si $\cos(n\alpha) = 0$, alors $\cos(\alpha)$ est une racine T_n. Il en résulte que si $n\alpha \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, alors $\cos(\alpha)$ est une racine de T_n. Pour $k \in \mathbb{Z}$, $\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$ est une racine de T_n. Comme cos induit une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on obtient n racines distinctes. On conclut donc

$$\boxed{T_n \text{ possède } n \text{ racines simples : } \cos\left(\tfrac{2k+1}{2n}\pi\right) \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!].}$$

4. Le polynôme Q_n doit être non nul, il doit donc être de degré au moins n, car il a au moins n racines $a+\cos\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right)$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. On remarque que le polynôme $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(X-a)$ remplit ces conditions. On conclut donc

$$\boxed{Q_n = \tfrac{1}{2^{n-1}} T_n(X-a).}$$

5. En utilisant la définition de Q_n et l'expression de T_n, on a directement :

$$\boxed{Q_n(0) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{0\le 2k\le n} \binom{n}{2k}(-1)^k(1-a^2)^k(-a)^{n-2k}.}$$

6. Comme $a > 1$, en manipulant l'expression précédente, on obtient

$$Q_n(0) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k}(a^2-1)^k a^{n-2k} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k}\left(\sqrt{a^2-1}\right)^{2k} a^{n-2k}.$$

Introduisons les quantités $P_n(a)$ et $I_n(a)$ définie par

$$P_n(a) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k}\left(\sqrt{a^2-1}\right)^{2k} a^{n-2k} \quad \text{et} \quad I_n(a) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k+1}\left(\sqrt{a^2-1}\right)^{2k+1} a^{n-1-2k}$$

En utilisant le binôme de Newton, on obtient

$$\begin{aligned} P_n(a) + I_n(a) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{k}\left(\sqrt{a^2-1}\right)^k a^{n-k} = \left(a + \sqrt{a^2-1}\right)^n \\ P_n(a) - I_n(a) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{k}(-1)^k\left(\sqrt{a^2-1}\right)^k a^{n-k} = \left(a - \sqrt{a^2-1}\right)^n \end{aligned}$$

On en déduit $P_n(a) = \frac{1}{2}\left(\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^n + \left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n\right)$ et on conclut

$$\boxed{Q_n(0) = \frac{(-1)^n}{2^n}\left(\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^n + \left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n\right).}$$

8. Si P est un polynôme de degré n scindé, le produit des racines de P comptées avec leur multiplicité est égale à $(-1)^n \frac{a_0}{a_n}$ où a_0 est le coefficient du monôme de degré 0 et a_n le coefficient dominant. On remarque que $a_0 = Q_n(0)$. En appliquant ce résultat à Q_n, on obtient directement

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1}\left(a+\cos\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)\right)=\frac{1}{2^n}\left(\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^n+\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n\right).}$$

9. Comme $a>1$ et $\cos\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)\geq -1$, les termes du produit de la question précédente sont strictement positif. On peut donc passer au ln et on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(a+\cos\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)\right) &= \ln\left(\frac{1}{2^n}\left(\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^n+\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n\right)\right)\\ &= -n\ln 2+\ln\left(\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^n+\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n\right).\end{aligned}$$

On dérive alors l'expression par rapport à a et on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a+\cos\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)} &= \frac{n\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right)\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{n-1}+n\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right)\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^{n-1}}{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^n+\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n}\\ &= \frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\frac{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^n-\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n}{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^n+\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n}\end{aligned}$$

On conclut

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a+\cos\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)}=\frac{n}{\sqrt{a^2-1}}\frac{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^n-\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n}{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^n+\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^n}.}$$

10. En appliquant la formule de la question précédente pour $a=\frac{5}{4}$, on obtient

$$\begin{aligned}S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\frac{5}{4}+\cos\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)} &= \frac{n}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-1}}\frac{\left(\frac{5}{4}+\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-1}\right)^n-\left(\frac{5}{4}-\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-1}\right)^n}{\left(\frac{5}{4}+\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-1}\right)^n+\left(\frac{5}{4}-\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-1}\right)^n}\\ &= \frac{4n}{3}\frac{2^n-\frac{1}{2^n}}{2^n-\frac{1}{2^n}}=\frac{4n}{3}\frac{4^n-1}{4^n+1}.\end{aligned}$$

On conclut $\boxed{S_n=\frac{4n}{3}\frac{2^n-\frac{1}{2^n}}{2^n-\frac{1}{2^n}}=\frac{4n}{3}\frac{4^n-1}{4^n+1}.}$

11. En utilisant la formule obtenue à la question précédente, comme on a $\frac{4^n-1}{4^n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{4^n}{4^n}$, on a $\boxed{S_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{4}{3}n.}$

Puis

$$S_n-\frac{4}{3}n=\frac{4n}{3}\frac{-2}{4^n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{2n}{3\cdot 4^{n-1}}.$$

Il en résulte donc $\boxed{S_n=\frac{4n}{3}-\frac{2n}{3\cdot 4^{n-1}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{n}{4^n}\right).}$

12. Une fonction polynomiale est continue et $[-1,1]$ est un segment, donc l'image de $[-1,1]$ par une fonction polynomiale est un segment, la passage à la valeur étant continue. On conclut donc

$$\boxed{N(Q)\text{ est finie, c'est le maximum de la fonction } t\mapsto |Q(t)| \text{ sur } [-1,1].}$$

Pour l'égalité $N(\lambda P)=|\lambda|\,N(P)$, l'écrire...

13. On a $T_n(1)=T_n(\cos(0))=\cos(n\cdot 0)=1$. On a donc $N(T_n)\geq 1$. Puis pour $t\in[-1,1]$, on a $t=\cos(\arccos(t))$, d'où

$$T_n(t)=T_n(\cos(\arccos(t)))=\cos(n\arccos(t))\in[-1,1].$$

Il en résulte $N(T_n)\leq 1$ et on conclut $\boxed{N(T_n)=1.}$

14. Soit α une racine de R_n appartenant à $[-1,1]$. Comme $\alpha = \cos(\arccos(\alpha)$, on a donc $R_n(\alpha) = T_n(\alpha)-1 = \cos(n\arccos(\alpha))-1$. On en déduit que $n\arccos(\alpha) \equiv 0[2\pi]$, d'où $\arccos(\alpha) = \frac{2k\pi}{n}$ avec k tel que $\frac{2k\pi}{n} \in [0,\pi]$ (image de $[-1,1]$ par arccos). On en déduit que k est un entier compris entre 0 et $\frac{n}{2}$, soit dans l'intervalle d'entier $[\![0,p_n-1]\!]$ ce qui fait p_n valeurs. Par passage au cos, les racines dans $[-1,1]$ sont donc $\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$ avec $k\in[\![0,p_n-1]\!]$. Par décroissance stricte du cos sur $[0,\pi]$, on conclut donc

$\boxed{\alpha_1 = \cos\left(\frac{2(p_n-1)\pi}{n}\right),\ \alpha_2 = \cos\left(\frac{2(p_n-2)\pi}{n}\right),\ \cdots \text{ et } \alpha_{p_n} = \cos\left(\frac{2(p_n-p_n)\pi}{n}\right) = 1 \text{ donnent } p_n \text{ racines distinctes de } R_n \text{ dans } [-1,1].}$

15. Soit β une racine de H_n appartenant à $[-1,1]$. Comme $\beta = \cos(\arccos(\beta)$, on a donc $H_n(\beta) = T_n(\beta)+1 = \cos(n\arccos(\beta))+1$. On en déduit que $n\arccos(\beta) \equiv \pi[2\pi]$, d'où $\arccos(\beta) = \frac{(2k+1)\pi}{n}$ avec k tel que $\frac{(2k+1)\pi}{n} \in [0,\pi]$ (image de $[-1,1]$ par arccos). On en déduit que k est un entier compris entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{n-1}{2}$, soit dans l'intervalle d'entier $[\![0,q_n-1]\!]$ ce qui fait q_n valeurs. Par passage au cos, les racines dans $[-1,1]$ sont donc $\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{n}\right)$ avec $k\in[\![0,q_n-1]\!]$. Par décroissance stricte du cos sur $[0,\pi]$, on conclut donc

$\boxed{\beta_1 = \cos\left(\frac{(2(q_n-1)+1)\pi}{n}\right),\ \beta_2 = \cos\left(\frac{(2(q_n-2)+1)\pi}{n}\right),\ \cdots \text{ et } \beta_{q_n} = \cos\left(\frac{2(q_n-q_n)+1\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \text{ donnent } q_n \text{ racines distinctes de } H_n \text{ dans } [-1,1].}$

16. (a) Les polynômes Q et $\tilde{T}_n$ sont unitaire de degré n et distincts (car $N(\tilde{T}_n) > N(Q)$). Le polynôme $Q-\tilde{T}_n$ est donc non nul et degré strictement plus petit que n (les 2 monômes unitaires de degré n s'annulent par soustraction).

(b) On a $T_n(\alpha_i) = 1 = N(T_n)$ par construction. On en déduit que $\tilde{T}_n(\alpha_i) = N(\tilde{T}_n) > N(Q) \geq |Q(\alpha_i)| \geq Q(\alpha_i)$. On a donc

$$\boxed{T_n(\alpha_i) - Q(\alpha_i) > 0.}$$

(c) On a $T_n(\beta_i) = -1 = -N(T_n)$ par construction. On en déduit que $\tilde{T}_n(\beta_i) = -N(\tilde{T}_n) < -N(Q) \leq -|Q(\beta_i)| \geq Q(\beta_i)$. On a donc

$$\boxed{T_n(\beta_i) - Q(\beta_i) < 0.}$$

Montrer pour tout $i \in [1,q_n]$, $\tilde{T}_n(\beta_i) - Q(\beta_i) < 0$.

(d) On remarque que si n est pair, on a

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \cdots < \beta_{q_n} < \alpha_{p_n}$$

et si n impair ont

$$\beta_1 < \alpha_1 < \cdots < \beta_{q_n} < \alpha_{p_n}.$$

Dans les 2 cas, on a $n+1$ réels en ordre croissant, tel que l'évaluation de $\tilde{T}_n - Q$ en chacune de ces réels change de signe successivement, comme les fonctions polynomiales sont continues par le théorème des valeurs intermédiaire, il y a donc au moins une racine entre chaque couple de réels successifs. Il y a donc au moins n racines pour le polynôme $\tilde{T}_n - Q$ qui est non nul et degré au plus $n-1$. On obtient donc une contradiction. Le polynôme Q n'existe donc pas.

17. On a montré que la quantité $T_n(t)$ est comprise en -1 et 1 pour $t\in[-1,1]$, or $T_n(\alpha_i)=1$ et $T_n(\beta_i)=-1$. On en déduit que si α_i (respectivement β_i) n'est pas une borne de l'intervalle, il y a un extremum local en ce point, donc la dérivée est nulle en ce point, soit $T_n'(\alpha_i) = 0$ (respectivement $T_n'(\beta_i)=0$) or $T'(\alpha_i) = R_n'(\alpha_i)$ (respectivement $T'(\beta_i) = R_n'(\beta_i)$). On en déduit que si α_i (respectivement β_i) n'est pas une borne de l'intervalle, c'est au moins un racine double de R_n (respectivement H_n).

Comme $T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n\cdot 0) = 1$, 1 est toujours racine de H_n. Puis $T_n(-1) = T_n(\cos(\pi)) = \cos(n\cdot\pi) = (-1)^n$, donc -1 est racine de R_n si n pair et racine de H_n si n impair.

On en déduit donc que pour n pair, toutes les racines de R_n sauf -1 et 1 obtenu en 13 sont au moins d'ordre 2 et -1 et 1 sont d'ordre au moins 1 de Q_n. On a donc obtenu $\frac{n-2}{2}$ racines d'ordre au moins 2 et 2 racines d'ordre au moins 1. Comme le somme des ordres de toutes les racines est au plus n le degré de Q_n et que $2\cdot\frac{n-2}{2} + 1\cdot 1 = n$, les minorations sont des égalités et on a obtenu tous les racines. Si n est pair, on obtient que les racines H_n sont exactement les les racines obtenu en 13. qui sont toutes doubles sauf -1 et 1.

Par raisonnement similaire pour les différentes parité de n sur R_n et H_n, on conclut :

On a obtenu toutes les racines de R_n et H_n aux questions 13. et 14. et on a de plus :

(a) Si n pair :
Les racines de R_n sont doubles, sauf -1 et 1 qui sont des racines simples.
Toutes les racines de H_n sont doubles.

(b) Si n impair :
Les racines de R_n sont doubles, sauf 1 qui est une racine simple.
Les racines de H_n sont doubles, sauf -1 qui est une racine simple.

On pourra regarder les courbes des fonctions associées aux polynômes T_3 et T_4 pour mieux comprendre ce qui se passe.