Devoir surveillé 8

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1.

Soient $P = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = X^n - 1$.

1. Factoriser dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ le polynôme P.
2. Factoriser dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ le polynôme Q_n.
3. On note $u_n = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} P(\omega)$, où $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des racines n-ème de l'unité.
   (a) Exprimer sous forme réduite u_n.
   (b) Déterminer pour quels entiers n, $u_n = 0$.

Problème 1

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on définit la suite $(u_n(x))$ par

$$\begin{cases} u_0(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{(u_n(x))^2}{n+1}. \end{cases}$$

L'expression $u_n(x)$ définit donc une fonction u_n de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

On se propose d'étudier le comportement de la suite $(u_n(x))$.

Etude de u_n et détermination de la limite de la suite $(u_n(x))$ (si elle existe).

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad u_n(x) \geq 0$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est strictement croissante.
3. Dresser le tableau de variation de u_n. On précisera les limites.
4. Justifier que u_n définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un intervalle à préciser.
5. Déterminer le domaine de dérivabilité de la réciproque de la fonction u_n.
6. Soit x fixé, on suppose que la suite $(u_n(x))$ admet une limite finie ℓ quand n tend vers $+\infty$. Préciser la valeur de ℓ.

Bassins d'attraction :

On note

$$E_0 = \left\{x\,;\, x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right\} \quad E_\infty = \left\{x\,;\, x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\right\}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $u_N(x) \leq N + 1$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n(x))$ est décroissante à partir du rang N.
   (b) Justifier que $x \in E_0$.
   (c) Justifier que $1 \in E_0$.
8. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, tel que la suite $(u_n(x))$ ne converge pas vers 0.
   (a) Montrer que la suite $(u_n(x))$ diverge vers $+\infty$. (Penser à utiliser la question 7)
   (b) En déduire que $\mathbb{R}^+ = E_0 \cup E_\infty$.
   (c) Justifier que $2 \in E_\infty$. (On pourra regarder la propriété $u_n(x) \geq n + 2$)
   (d) Justifier que 2 majore E_0.
9. Justifier que E_0 admet une borne sup noté δ.
10. Justifier que E_0 et E_∞ sont des intervalles. On précisera les différentes possibilités pour E_0 et E_∞ en utilisant δ.
11. Montrer $x_0 \in E_0$, si et seulement si il existe N tel que $u_N(x_0) < 1$.
12. Soit $x_0 \in E_0$, en considérant le rang N tel que $u_N(x_0) < 1$ et la fonction u_N, montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $x_0 + \epsilon \in E_0$.
13. En déduire que $\delta \notin E_0$ et expliciter E_0 et E_∞.

Problème 2

On fixe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et un réel $a > 1$.

Partie I : Préliminaires

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

   On exprimera le polynôme T_n sous forme d'une somme faisant intervenir des symboles binomiaux.

2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.
3. Déterminer les racines de T_n.

Partie II : Construction d'un polynôme auxiliaire

4. À partir du polynôme T_n, exprimer un polynôme unitaire Q_n de degré minimal dont les racines sont $a + \cos\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.
5. Exprimer $Q_n(0)$ sous forme d'une somme.
6. Montrer que

$$Q_n(0) = \frac{(-1)^n}{2^n}\left(\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)^n + \left(a - \sqrt{a^2-1}\right)^n\right).$$

Partie III : Applications

8. Exprimer sous forme réduite

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(a + \cos\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right)\right).$$

9. Exprimer sous forme réduite

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a + \cos\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right)}.$$

   (Indication : transformation produit-somme)

10. Montrer que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{5}{4} + \cos\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{4n}{3}\frac{4^n - 1}{4^n + 1}.$$

11. Déterminer un équivalent simple puis développement asymptotique à 2 termes de la suite (S_n) à la question précédente

Partie IV : Pour aller plus loin sur les polynômes de Tchebychev :

Pour un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, on définit la quantité $N(Q)$ par

$$N(Q) = \sup_{t \in [-1,1]} |Q(t)|,$$

avec $N(Q) = +\infty$ si l'image de $[-1, 1]$ par la fonction $t \mapsto |Q(t)|$ n'est pas majorée. On notera $\tilde{T}_n$ le polynôme unitaire proportionnel à T_n. (c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $T_n = \lambda \tilde{T}_n$.)

Le but de cette partie est de montrer que pour tout polynôme Q unitaire de degré n à coefficients réels, on a

$$N(Q) \geq N(\tilde{T}_n).$$

12. Justifier que $N(Q)$ est finie et que c'est un maximum. On montrera de plus que, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda Q) = |\lambda| N(Q)$.
13. Montrer que $N(T_n) = 1$.
14. Montrer que le polynôme $R_n = -1 + T_n$ possède p_n racines différentes sur $[-1, 1]$ avec $p_n = \begin{cases} \frac{n+2}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.

    On les explicitera et les notera $\alpha_1 < \cdots < \alpha_{p_n}$.

15. Montrer que le polynôme $H_n = T_n + 1$ possède q_n racines différentes sur $[-1, 1]$ avec $q_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.

    On les explicitera et les notera $\beta_1 < \cdots < \beta_{q_n}$.

16. Supposons l'existence d' un polynôme Q unitaire de degré n tel que $N(Q) < N(\tilde{T}_n)$.
    (a) Que dire du degré du polynôme $\tilde{T}_n - Q$?
    (b) Montrer pour tout $i \in [1, p_n]$, $\tilde{T}_n(\alpha_i) - Q(\alpha_i) > 0$.
    (c) Montrer pour tout $i \in [1, q_n]$, $\tilde{T}_n(\beta_i) - Q(\beta_i) < 0$.
    (d) Conclure.
17. Sans lien avec les questions précédentes, déterminer l'ordre des racines des polynômes R_n et H_n trouvées aux questions 13 et 14.