Devoir surveillé 7

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1.

On considère l'équation $(E) : x^2 + y^2 = z^2$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$.

1. Donner une solution simple de (E).

Dans la suite, on suppose que $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

2. On note $d = x \wedge y$.
   (a) Soit $n, m \in \mathbb{N}$, tel que n^2 divise m^2. Montrer que n divise m.
   (b) Montrer que d divise z.
   (c) On pose $x = dx'$, $y = dy'$ et $z = dz'$. Montrer que $x' \wedge z' = 1$ et $y' \wedge z' = 1$.
   (x', y', z') est clairement une solution de (E).
3. (a) Soient a, b 2 entiers impairs. Montrer que $a^2 + b^2 - 2$ est divisible par 4.
   (b) Justifier que x', y' ne peuvent pas être tous les deux impairs.
   (c) Montrer que x', y' sont de parités différentes. Quelle est la parité de z' ?

Pour la suite, on suppose x' entier pair.

4. On pose $x = 2a$ avec $a \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer qu'il existe b, c deux entiers strictement positifs, tel que $z' = b + c$ et $y' = b - c$. En déduite que $a^2 = bc$.
   (b) Montrer que b et c sont premiers entre eux.
   (c) Montrer qu'il existe $u, v \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = u^2$ et $c = v^2$.
   (d) En déduire que
   $$\begin{cases} x = 2duv \\ y = d(u^2 - v^2) \\ z = d(u^2 + v^2). \end{cases}$$
5. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 2.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$g(x) = (x - 1)^2 e^{-x}.$$
   (a) Etudier la fonction g et tracer sa courbe.
   (b) Pour $h \in \mathbb{R}$, déterminer le nombre de solution à l'équation $g(x) = h$.

   Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$f_\lambda(x) = x + \lambda(x^2 + 1)e^{-x}.$$
   On appelle Γ_λ la courbe représentative de f_λ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

2. Montrer que par tout point du plan passe une unique courbe Γ_λ.
3. Montrer que les courbes Γ_λ admettent une asymptote commune.
4. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f_λ au voisinage de 3.
5. Déterminer suivant λ, le nombre de point(s) de Γ_λ qui admette une tangente de vecteur directeur $\overrightarrow{i}$. On note Ω l'ensemble des points vérifiants cette propriété, quand λ parcourt $\mathbb{R}$. On montrera que Ω est l'image de la fonction φ d'expression $\varphi(x) = x + \frac{x^2+1}{(x-1)^2}$. On étudiera et représentera graphiquement [1] l'ensemble Ω. On précisera les éventuelles asymptotes de Ω et la position de la courbe par rapport à l'asymptote.
6. Etudier la concavité/convexité de la courbe Γ_λ.
7. Soit k un nombre réel.
   Pour tout réel λ, on considère la tangente $T_{\lambda,k}$ à Γ_λ au point $(k, f_\lambda(k))$.
   Montrer que, pour $k \neq 1$, les droites $T_{\lambda,k}$ sont concourantes en un point M_k dont on précisera les coordonnées.
   Que dire si $k = 1$?
8. Dresser les tableaux de variations de f_{-2}, f_3 et f_7. (On ne précisera pas numériquement les extrema)
   Tracer sur un même graphe $\Omega, \Gamma_0, \Gamma_{-2}, \Gamma_3$ et Γ_7. On regroupera toutes les informations obtenus et on expliquera brièvement la construction. *(On pourra utiliser le fait que $4e^{-3} \approx 0.20$ à 10^{-2}.)*

Exercice 3.

On admettra pour cet exercice, le résultat suivant :

Proposition 1 (Moyenne de Césaro)**.** *Si la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors la suite (v_n) définie par*

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_n$$

converge vers ℓ.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2x^3 + 3x^5$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   Dans la suite, g désigne la bijection réciproque de f.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Donner un équivalent simple de f en 0 et en $+\infty$. En déduire un équivalent simple de g en 0 et en $+\infty$.
4. Esquisser le graphe de g.
5. Calculer le développement limité à l'ordre 6 en 0 de g.
6. On considère la suite u de premier terme $u_0 = 861$, et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = g(u_n)$.
   (a) Montrer que $I = [0, +\infty[$ est stable par g, et que pour $y \in I$, on a $g(y) \leq y$.
   (b) Etudier cette suite.
   (c) Montrer que pour α bien choisi, la suite (r_n) définie par $r_n = \frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha}$ admet une limite finie non nulle lorsque n tend vers $+\infty$.
   (On pourra montrer dans un premier temps que $r_n \sim -2\alpha \cdot n^{\alpha+2}$)
   (d) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r_k$ et en déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

1. On utilisera la même figure qu'à la question 8.