Devoir surveillé 6
Correction

Exercice 1.

1. On calcule directement

$$\boxed{\text{Il y a } \binom{32}{8} \text{ mains possibles.}}$$

2. Pour $(5, 2, 1, 0)$, il faut choisir la couleur qui apparait 5 fois, puis choisir 5 cartes soit $4\binom{8}{5}$.
Il faut ensuite choisir la couleur qui apparait 2 fois dans les 3 couleurs restantes, puis choisir 2 cartes soit $3\binom{8}{2}$ possibilités.
Il faut ensuite choisir la couleur qui apparait 1 fois dans les 2 couleurs restantes, puis choisir 1 cartes soit $2\binom{8}{1}$ possibilités.
Il faut ensuite choisir la couleur qui apparait 0 fois dans la couleur restante, puis choisir 0 cartes soit $2\binom{8}{0}$ possibilités.

$$\boxed{\text{Il y a } 4\binom{8}{5} \cdot 3\binom{8}{2} \cdot 2\binom{8}{1} = 192\binom{8}{5}\binom{8}{2} \text{ mains donnant } (5, 2, 1, 0)}$$

Pour $(5, 1, 1, 1)$, il faut choisir la couleur qui apparait 5 fois, puis choisir 5 cartes soit $4\binom{8}{5}$ possibilités.
Il faut ensuite choisir choisir 1 carte soit $\binom{8}{1}$ possibilités dans chaque couleur restante.

$$\boxed{\text{Il y a } 4\binom{8}{5}\binom{8}{1}^3 = 4 \cdot 8^3\binom{8}{5} \text{ mains donnant } (5, 1, 1, 1)}$$

3. On cherche tous les 4-uplets (n_1, n_2, n_3, n_4), d'entiers tel que $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4$ et $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 8$.
On a donc en passant aux inégalités $4n_1 \geq 8$ et $8 \geq 4n_4$.
On a donc $n_4 \leq 2$ et $n_1 \geq 2$, avec égalité si et seulement dans chaque cas, si et seulement si $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2$.
On a donc sept cas à distinguer :
   (a) $n_1 = 2$, alors, grâce à la remarque, on a $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2$. Une seule possibilité.
   (b) $n_1 = 3$, alors, grâce à la remarque, on a $n_4 = 0$ ou 1. On a alors deux sous-cas à distinguer :
      i. $n_4 = 0$, il faut alors $0 \leq n_3 \leq n_2 \leq 3$, tel que $n_2 + n_3 = 5$. Un seule possibilité $n_2 = 3$ et $n_3 = 2$.
      ii. $n_4 = 1$, il faut alors $1 \leq n_3 \leq n_2 \leq 3$. tel que $n_2 + n_3 = 4$. Deux possibilité ($n_2 = 3$ et $n_3 = 1$) ou ($n_2 = 2$ et $n_3 = 2$) .
   (c) $n_1 = 4$, alors, grâce à la remarque, on a $n_4 = 0$ ou 1. On a alors deux sous-cas à distinguer :
      i. $n_4 = 0$, il faut alors $0 \leq n_3 \leq n_2 \leq 4$, tel que $n_2 + n_3 = 4$. Trois possibilités $(4, 0)$, $(3, 1)$ et $(2, 2)$
      ii. $n_4 = 1$, il faut alors $1 \leq n_3 \leq n_2 \leq 3$. tel que $n_2 + n_3 = 3$. Un possibilité $(2, 1)$.
   (d) $n_1 = 5$, alors, grâce à la remarque, on a $n_4 = 0$ ou 1. On a alors deux sous-cas à distinguer :
      i. $n_4 = 0$, il faut alors $0 \leq n_3 \leq n_2 \leq 5$, tel que $n_2 + n_3 = 3$. Deux possibilités $(3, 0)$, $(2, 1)$.
      ii. $n_4 = 1$, il faut alors $1 \leq n_3 \leq n_2 \leq 5$. tel que $n_2 + n_3 = 2$. Une possibilité $(1, 1)$.
   (e) $n_1 = 6$, alors, grâce à la remarque, on a $n_4 = 0$ ou 1. On a alors deux sous-cas à distinguer :
      i. $n_4 = 0$, il faut alors $0 \leq n_3 \leq n_2 \leq 6$, tel que $n_2 + n_3 = 2$. Deux possibilités $(2, 0)$, $(1, 1)$.
      ii. $n_4 = 1$, il faut alors $1 \leq n_3 \leq n_2 \leq 6$. tel que $n_2 + n_3 = 1$. Impossible.
   (f) $n_1 = 7$, alors, grâce à la remarque, on a $n_4 = 0$ ou 1. On a alors deux sous-cas à distinguer :
      i. $n_4 = 0$, il faut alors $0 \leq n_3 \leq n_2 \leq 7$, tel que $n_2 + n_3 = 1$. Une possibilité $(1, 0)$.
      ii. $n_4 = 1$, il faut alors $1 \leq n_3 \leq n_2 \leq 6$. tel que $n_2 + n_3 = 0$. Impossible.
   (g) $n_1 = 8$, alors une seule possibilité $(8, 0, 0, 0)$.

On conclut

$$\boxed{\text{Il y a 15 configurations possibles.}}$$

Exercice 2.

1. Comme la suite est positive, on étudie de le rapport des termes et on a

$$\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = \operatorname{ch}\left(\frac{x}{n+1}\right) \geq 1$$

On conclut donc

$$\boxed{\text{La suite } (P_n(x)) \text{ est croissante.}}$$

2. (a) On calcule que

$$u_{n+1} - u_n = \ln \operatorname{ch}\left(\frac{x}{n+1}\right).$$

Or $\operatorname{ch}\left(\frac{x}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, par les équivalent usuels, on a donc

$$u_{n+1} - u_n \underset{n}{\sim} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{n+1}\right) - 1.$$

Puis

$$u_{n+1} - u_n \underset{n}{\sim} \frac{x^2}{2(n+1)^2}.$$

On conclut donc

$$\boxed{u_{n+1} - u_n \underset{n}{\sim} \frac{x^2}{2n^2}.}$$

(b) Grâce à la question précédente, on a

$$\frac{n^2}{x^2}(u_{n+1} - u_n) \underset{n}{\sim} \frac{1}{2}.$$

Comme $1 > \frac{1}{2}$, on a donc à partir d'un certain rang

$$\frac{n^2}{x^2}(u_{n+1} - u_n) \leq 1.$$

On résulte que

$$\boxed{\text{il existe } n_0, \text{ tel que si } n \geq n_0,\ u_{n+1} - u_n \leq \tfrac{x^2}{n^2}.}$$

Comme pour $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$, on a

$$\boxed{\text{si } n \geq \max(n_0, 2),\ u_{n+1} - u_n \leq \tfrac{x^2}{n(n-1)}.}$$

(c) Un développement en éléments simples donne

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

On obtient alors par télescopage

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}.$$

On a donc

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}.}$$

(d) Par télescopage, on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_0.$$

On a donc

$$u_n = u_0 + \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - u_k.$$

En coupant en $\max(n_0, 2)$, on a donc

$$u_n = u_0 + \sum_{k=1}^{\max(n_0,2)-1} (u_{k+1} - u_k) + \sum_{k=\max(n_0,2)}^{n} (u_{k+1} - u_k).$$

Donc

$$u_n \leq u_0 + \left(\sum_{k=1}^{\max(n_0,2)-1} (u_{k+1} - u_k) \right) + \sum_{k=\max(n_0,2)}^{n} \frac{x^2}{k(k-1)}.$$

Puis, en rajoutant des termes positifs à droite, on a

$$u_n \leq u_0 + \left(\sum_{k=1}^{\max(n_0,2)-1} (u_{k+1} - u_k) \right) + x^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}.$$

En utilisant la question précédente, on a donc

$$u_n \leq u_0 + \left(\sum_{k=1}^{\max(n_0,2)-1} (u_{k+1} - u_k) \right) + x^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq u_0 + \left(\sum_{k=1}^{\max(n_0,2)-1} (u_{k+1} - u_k) \right) + x^2.$$

On a trouvé un borne indépendante de n et on peut conclure

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est majorée.}}$$

(e) Comme la fonction ln est croissante et que la suite $(P_n(x))$ est croissante, on a la croissance de la suite (u_n).
Une suite croissante majorée converge. La suite (u_n) converge donc vers une limite ℓ.
Par passage à l'exponentielle, on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (P_n(x)) \text{ converge vers } e^{\ell}.}$$

Exercice 3.

1. Comme $H \neq \{0\}$ par hypothèse de l'énoncé et que $\{0\} \subset H$, car H est un sous-groupe, il existe $x \in H$, tel que $x \neq 0$. On a donc x ou $-x$ élément de A. L'ensemble A est donc une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0, la borne inf de A existe et est finie. On conclut

$$\boxed{\text{Le nombre } \alpha \text{ est bien défini.}}$$

2. Premier cas : $\alpha > 0$

   (a) i. Comme α est la borne inf de A, par caractérisation de la borne inf, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $\alpha \leq x \leq \alpha + \epsilon$. On peut choisir $\epsilon = \alpha$ tel que il existe donc $x \in H$, tel que $\alpha \leq x \leq 2\alpha$. Comme $\alpha \notin H$, on a donc $\alpha < x \leq 2\alpha$. Il existe donc $\beta \in]\alpha, x[$. En appliquant la caractérisation de la borne à $\epsilon = \beta - \alpha > 0$, il existe $y \in H$, tel que $\alpha \leq y \leq \beta < x$. Comme $\alpha \notin H$, $y \neq \alpha$, on a donc

   $$\boxed{\text{L'existence de } x, y \in H, \text{ tel que } \alpha < y < x \leq 2\alpha.}$$

   ii. Comme $x, y \in H$, construit à la question précédente, vérifie $\alpha < y < x \leq 2\alpha$. On a donc $0 < x - y < \alpha$. Or H est sous-groupe, donc $x - y \in H$ et $0 < x - y < \alpha$. Cela contredit la définition de α comme borne inf de A. On conclut

   $$\boxed{\alpha \in H.}$$

   (b) L'écrire proprement !

(c) Montrons le résultat par double inclusion. L'inclusion $\alpha\mathbb{Z} \subset H$ a été démontrée à la question précédente.
Pour la réciproque, en utilisant l'indication, on a, par définition de la partie entière

$$\left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor \leq \frac{x}{\alpha} < \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor + 1.$$

Soit

$$k\alpha \leq x < k\alpha + \alpha,$$

où $k = \left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor$ est un entier. On a donc

$$0 \leq x - k\alpha < \alpha,$$

avec $x - k\alpha \in H$, grâce à la question précédente. Si $x - k\alpha \neq 0$, cela contredirait la définition de α, on a donc $x = k\alpha$.
On donc a $H \subset \alpha\mathbb{Z}$.
On conclut

$$\boxed{H = \alpha\mathbb{Z}.}$$

3. Second cas : $\alpha = 0$

(a) Comme α est la borne inf de A, par caractérisation de la borne inf, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $\alpha \leq x \leq \alpha + \epsilon$. Pour tout entier n, on peut prendre $\epsilon = \frac{1}{n+1}$ et choisir $\epsilon_n \in H$, tel que $0 \leq \epsilon_n \leq \frac{1}{n+1}$. Comme $0 \notin A$, on a $0 < \epsilon_n \leq \frac{1}{n+1}$.

La suite (ϵ_n), ainsi construite, a ses valeurs strictement positives dans H et converge vers 0 par le théorème des gendarmes.

(b) On considère l'indication

$$\left\lfloor \frac{x}{\epsilon_n} \right\rfloor \leq \frac{x}{\epsilon_n} < \left\lfloor \frac{x}{\epsilon_n} \right\rfloor + 1.$$

D'où, par positivité,

$$k_n\epsilon_n \leq x < k_n\epsilon_n + \epsilon_n,$$

où $k = \left\lfloor \frac{x}{\epsilon_n} \right\rfloor$ est un entier. On a donc

$$0 \leq x - k_n\epsilon_n < \epsilon_n,$$

On définit la suite (u_n) par $u_n = k_n\epsilon_n$.
Comme k_n est entier, $\epsilon_n \in H$ et H sous groupe, on a, pour tout n, $u_n \in H$.
Par le théorème de gendarme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. On conclut donc

$$\boxed{H \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$$

Exercice 4.

Pour $n \geq 2$, on définit la fonction f_n par

$$f_n(x) = x^n - nx + 1.$$

1. Les solutions de l'équation (E_n) sont les zéros de la fonction f_n.
Etudions f_n sur $[0, 1]$. On a $f_n'(x) = n(x^{n-1} - 1)$, on en déduit le tableau de variation

$$\begin{array}{|c|ccc|}
\hline
x & 0 & & 1 \\
\hline
f'(x) & & - & 0 \\
\hline
f(x) & 1 & \searrow & -n+2 \\
\hline
\end{array},$$

Par stricte monotonie et continuité sur $[0,1]$, comme $-n+1 \geq 0$, par la théorème de la bijection, $f_n(x)=0$ a une unique solution et on conclut que

$$\boxed{\text{l'équation } (E_n) \text{ admet une unique solution } x_n \text{ dans l'intervalle } [0,1].}$$

2. On trouve que l'unique solution de (E_2) est

$$\boxed{x_2 = 1.}$$

3. On a

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n+1)x_n + 1.$$

Comme $x_n^n - nx_n + 1 = 0$, on a

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n+1)x_n + 1 - (x_n^n - nx_n + 1) = x_n^{n+1} - x_n^n - x_n.$$

Comme $0 \leq x_n \geq 1$, on a $x_n^{n+1} \leq x_n^n$, on en déduit que $f_{n+1}(x_n) \leq 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$. La fonction f_{n+1} étant décroissante, on a donc $x_n \geq x_{n+1}$. On conclut

$$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est décroissante.}}$$

4. La suite (x_n) est décroissante minorée par 0, elle converge donc vers une limite $\ell \geq 0$.
Supposons $\ell > 0$.
Comme $0 \leq x_n \leq x_2 = 1$ à partir du rang 2, on a donc $0 \leq x_n^n + 1 \leq 2$. Or, si $\ell > 0$, on a

$$x_n^n + 1 = nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Contradictoire ! On conclut donc

$$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ converge vers } 0.}$$

5. Comme x_n tend vers 0, on a

$$x_n^n \underset{0\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pas d'indétermination ! On a, donc

$$nx_n = x_n^n + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Il en résulte que $nx_n \underset{n}{\sim} 1$ et on conclut

$$\boxed{x_n \underset{n}{\sim} \frac{1}{n}.}$$

6. En utilisant l'équation (E_n), on a

$$x_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}x_n^n.$$

On ne peut pas passer des équivalents à un exposant variable.
Utilisons l'indication.
Soit $b \in]0,1[$, comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a donc à partir d'un certain rang

$$|x_n| \leq b,$$

d'où $\frac{|x_n^n|}{b^n} \leq 1$. Donc à partir d'un certain, on a

$$\frac{\left|x_n - \frac{1}{n}\right|}{b^n} = \frac{1}{n}\frac{|x_n|^n}{b^n} \leq \frac{1}{n}.$$

On a donc bien $u_n - \frac{1}{n} = o(b^n)$. On peut alors écrire

$$x_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{n+1}}(nx_n)^n = \frac{1}{n^{n+1}}e^{n\ln(nx_n)}$$

Comme $nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a

$$n\ln(nx_n) \underset{n}{\sim} n(nx_n - 1) = n^2(x_n - \frac{1}{n}) = o(n^2 b^n).$$

Par croissance comparée, on a $n^2 b^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et il en résulte

$$e^{n\ln(nx_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On conclut

$$\boxed{x_n - \tfrac{1}{n} \underset{n}{\sim} \frac{1}{n^{n+1}}.}$$

Exercice 5.

Notons $(\star)$ la relation définissant $\mathcal{S}$.

<u>Partie 1 : Structure de $\mathcal{S}$</u>

1. On sait déjà que l'ensemble des suites réelles muni de l'addition, $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +)$ est un groupe. Il suffit de montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour cela utilisons la caractérisation des sous-groupes :
   - La suite nulle (qui est le neutre de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +)$ vérifie $(\star)$ et donc appartient à $\mathcal{S}$.
   - Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathcal{S}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$\begin{aligned}(u-v)_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} &= (4n+2)u_n + u_{n-1} - (4n+2)v_n - v_{n-1}\\ &= (4n+2)(u_n - v_n) + u_{n-1} - v_{n-1} = (4n+2)(u-v)_n - (u-v)_{n-1}\end{aligned}$$

   Donc la suite $(u_n - v_n)$ vérifie $(\star)$ et appartient donc à $\mathcal{S}$.

   Finalement $\boxed{(\mathcal{S}, +) \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +) \text{ et donc un groupe}}$

2. $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe car c'est le groupe produit de $(\mathbb{R}, +)$ avec lui-même.
   Soient (u_n) et (v_n) deux suites dans $\mathcal{S}$. Alors

   $$\varphi(u+v) = ((u+v)_0, (u+v)_1) = (u_0 + v_0, u_1 + v_1) = (u_0, u_1) + (v_0, v_1) = \varphi(u) + \varphi(v)$$

   Donc φ est bien un morphisme de groupes.
   Calculons son noyau. Soit $(u_n) \in \ker\varphi$, alors par définition $\varphi(u) = (0,0)$ c'est-à-dire $(u_0, u_1) = (0,0)$. Par récurrence double on montre alors facilement avec $(\star)$ que (u_n) est la suite nulle. Donc $\ker\varphi = \{0_{\mathcal{S}}\}$ et donc φ est injective.

   Ensuite si on prend un couple quelconque $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, grâce à $(\star)$ on définit une suite (u_n) en disant que $u_0 = a$, $u_1 = b$ puis pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = (4n+2)u_n + u_{n-1}$. Alors évidemment $(u_n) \in \mathcal{S}$ et comme $\varphi((u_n)) = (a,b)$, (u_n) est un antécédent de (a,b) par φ. Donc φ est surjective.

   Finalement φ est injective et surjective et donc elle est bijective de $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}^2$ et comme c'est aussi un morphisme : $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de groupes}}$

<u>Partie 2 : Étude de la convergence</u>

3. Supposons par l'absurde que (u_n) converge vers $\ell \neq 0$. Alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (4n+2)u_n = \pm\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (4n+2)u_n + u_{n-1} = \pm\infty$. Ce qui contredit le fait que, d'après $(\star)$, cette suite a la même limite que (u_n).
   Finalement $\boxed{\text{si } (u_n) \in \mathcal{S} \text{ converge alors sa limite est nulle}}$

4. (a) Démontrons le résultat par récurrence double.
   - **Initialisation :** On a $b_1 = 1 \geq 6^0$ et $b_2 = (4+2)b_1 + b_0 = 6 \geq 6^1$
   - **Hérédité :** On suppose qu'on a pour un certain $n \geq 1$: $b_{n-1} \geq 6^{n-2}$ et $b_n \geq 6^{n-1}$. Alors

   $$b_{n+1} = (4n+2)b_n + b_{n-1} \geq (4+2)6^{n-1} + 6^{n-2} \geq 6^n$$

Donc d'après le principe de récurrence on a démontré que $\boxed{\text{pour tout } n \geq 1,\ b_n \geq 6^{n-1}}$

(b) D'après la question précédente on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$b_{n+1} - b_n = (4n+1)b_n + b_{n-1} \geq 0$$

Donc $\boxed{(b_n) \text{ est croissante}}$

(c) D'après le (a) et le théorème des gendarmes, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 6^{n-1} = +\infty$ on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty}$

(d) pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= a_{n+1}b_{n+2} - a_{n+2}b_{n+1} \\ &= a_{n+1}\left[(4(n+1)+2)b_{n+1} + b_n\right] - \left[(4(n+1)+2)a_{n+1} + a_n\right]b_{n+1} \\ &= a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1} \\ &= -w_n \end{aligned}$$

Donc $\boxed{(w_n) \text{ est géométrique de raison } -1}$ et donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ w_n = (-1)^n w_0 = (-1)^n}$

(e) En reprenant la définition de w_n et en divisant par b_n et par b_{n+1} qui ne sont jamais nuls on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad t_n - t_{n+1} = \frac{(-1)^n}{b_n b_{n+1}}}$$

(f) En appliquant le résultat précédent au rang $2n$ et $2n+1$ on obtient

$$t_{2n} - t_{2n+1} = \frac{1}{b_{2n}b_{2n+1}} \quad \text{et} \quad t_{2n+1} - t_{2n+2} = -\frac{1}{b_{2n+1}b_{2n+2}}$$

En sommant les deux on obtient

$$t_{2n} - t_{2n+2} = \frac{1}{b_{2n}b_{2n+1}} - \frac{1}{b_{2n+1}b_{2n+2}}$$

et cette quantitié est positive car la suite (b_n) est croissante et positive. Donc la suite (t_{2n}) est décroissante.
On montre de même que (t_{2n+1}) est croissante en appliquant le (e) aux rangs $2n+1$ et $2n+2$ et en sommant.
Enfin on a $t_{2n} - t_{2n+1} = \frac{1}{b_{2n}b_{2n+1}}$ et comme (b_n) tend vers $+\infty$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{b_{2n}b_{2n+1}} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{2n} - t_{2n+1} = 0$.

On a donc démontré que les suites (t_{2n}) et (t_{2n+1}) sont adjacentes. Et alors le théorème des suites adjacentes nous dit que $\boxed{(t_{2n}) \text{ et } (t_{2n+1}) \text{ convergent vers la même limite}}$

(g) Comme la suite des termes pairs et la suite des termes impairs forment une partition des termes de la suite, on peut conclure que $\boxed{(t_n) \text{ converge vers } \ell}$

5. (a) On montre facilement que la suite $(u_0a_n + u_1b_n)$ vérifie $(\star)$ et donc appratient à $\mathcal{S}$. Reprenons l'application φ de la partie 1. On sait que $\varphi((u_n)) = (u_0, u_1)$. Calculons

$$\varphi((u_0a_n + u_1b_n)) = (u_0a_0 + u_1b_0, u_0a_1 + u_1b_0) = (u_0, u_1)$$

Donc $\varphi((u_n)) = \varphi((u_0a_n + u_1b_n))$ et comme φ est injective
finalement $\boxed{\text{les deux suites } (u_n) \text{ et } (u_0a_n + u_1b_n) \text{ sont égales}}$

(b) On sait d'après la question 1 qu'alors (u_n) converge vers 0. De plus on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = u_0a_n + u_1b_n \iff \frac{u_n}{b_n} = u_0t_n + u_1$$

Comme (u_n) converge vers 0 et que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{b_n} = 0$. Et donc en passant à la limite dans la dernière égalité $\boxed{0 = u_0\ell + u_1}$

(c) i. Dans la question 4(f), le théorème des suites adjacentes nous donne aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

$$t_{2n+1} \leq \ell \leq t_{2m}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si n est impair, il s'écrit $n = 2k + 1$. on sait alors que $t_{2k+1} \leq \ell \leq t_{2k+2}$. D'où

$$|\ell - t_{2k+1}| \leq |t_{2k+2} - t_{2k+1}|$$

Or d'après le 4(e) on sait que $|t_{2k+2} - t_{2k+1}| = \frac{1}{b_{2k+1}b_{2k+2}}$ d'où

$$\boxed{|\ell - t_n| = |\ell - t_{2k+1}| \leq \frac{1}{b_{2k+1}b_{2k+2}} = \frac{1}{b_n b_{n+1}}}$$

On démontre de même le résultat si n est pair.

ii. En multipliant le résultat précédent par b_n qui est positif on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\ell b_n - a_n| \leq \frac{1}{b_{n+1}}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{b_{n+1}} = 0$ donc $\boxed{\text{la suite } (a_n - \ell b_n) \text{ converge vers } 0}$

iii. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 a_n + u_1 b_n$. Par hypothèse on peut remplacer dans cette égalité u_1 par $-u_0\ell$ d'où

$$u_n = u_0 a_n - u_0 \ell b_n = u_0(a_n - \ell b_n)$$

Donc, tout comme $(a_n - \ell b_n)$, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge}}$ (vers 0 mais ça on le savait déjà cf 1)

$\boxed{\text{Conclusion : } (u_n) \in \mathcal{S} \text{ converge si et seulement si } u_0\ell + u_1 = 0}$