Devoir surveillé 6

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1.

On considère la belote.

Elle se joue avec un jeu de 32 cartes (8 coeurs, 8 piques, 8 trèfles, et 8 carreaux).

Vous recevez 8 cartes. (On pourra considérer qu'on pioche 8 cartes parmi les 32)

Vous comptez les cartes dans chaque couleur dans votre main, vous notez (n_1, n_2, n_3, n_4), où

- n_1 est le nombre de cartes dans la couleur le plus présente.
- n_2 est le nombre de cartes dans la deuxième couleur la plus présente.
- n_3 est le nombre de cartes dans la troisième couleur la plus présente.
- n_4 est le nombre de cartes dans la quatrième couleur la plus présente (la couleur la moins présente..).

Exemple : Avoir 1 coeur, 3 piques, 2 trèfles, et 2 carreaux donne $(3, 2, 2, 1)$.

Pour la question 1 et 2, on pourra exprimer les résultats avec des symboles binomiaux.

1. Déterminer le nombre de mains possibles.
2. Déterminer le nombre de mains donnant $(5, 2, 1, 0)$ puis $(5, 1, 1, 1)$.
3. Déterminer le nombre de 4-uplets (n_1, n_2, n_3, n_4) possibles.

Exercice 2.

Pour tout réel x non nul et tout entier naturel n non nul, on pose :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{k}\right),$$

1. Montrer que, pour tout x réel, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. On pose $u_n = \ln(P_n(x))$
   (a) Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$.
   (b) Montrer qu'à partir d'un certain rang, on a $u_{n+1} - u_n \leq \frac{x^2}{n^2}$ puis que $u_{n+1} - u_n \leq \frac{x^2}{n(n-1)}$
   (c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.
   (d) Montrer que la suite (u_n) est majorée.
   (e) Justifier la convergence de la suite $(P_n(x))$.

Exercice 3.

On considère le groupe $(\mathbb{R}, +)$ et $(H, +)$ un sous-groupe non réduit à l'élément neutre.

On introduit

$$A = \{x\,;\, x \in H \text{ et } x > 0\}$$

et $\alpha = \inf A$.

1. Justifier que le nombre α est bien défini.
2. Premier cas : $\alpha > 0$
   (a) Objectif : Montrer que $\alpha \in H$.
   Supposons $\alpha \notin H$.
      i. Montrer qu'il existe $x \in H$ tel que que $\alpha < x \leq 2\alpha$, puis $y \in H$ tel que $\alpha < y < x$.
      ii. Conclure.
   (b) Montrer que $\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha k\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous groupe de H.
   (c) Montrer que $H = \alpha\mathbb{Z}$.
   (*Indication : Pour $x \in H$, on pourra considérer $\lfloor \frac{x}{\alpha} \rfloor$.)*
3. Second cas : $\alpha = 0$
   (a) Montrer qu'il existe (ϵ_n) une suite d'éléments strictement positifs de H de limite nulle.
   (b) Montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.
   (*Indication : Pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque, on pourra considérer $\left\lfloor \frac{x}{\epsilon_n} \right\rfloor$ pour construire une suite adaptée.)*

Exercice 4.

Pour $n \geq 2$, on définit la fonction f_n par

$$f_n(x) = x^n - nx + 1.$$

1. Montrer que l'équation
$$x^n + 1 = nx \quad (E_n)$$
admet une unique solution sur $[0, 1]$ que l'on notera x_n.
2. Calculer x_2.
3. Calculer $f_{n+1}(x_n)$ et en déduire la monotonie de x_n.
4. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite ℓ.
5. Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$ de la forme $\frac{A}{n^\alpha}$ (avec A et α des constantes à déterminer), que l'on notera a_n.
6. Déterminer un équivalent simple $u_n - \ell - a_n$.
   (On pourra commencer par justifier, que pour $b \in]0, 1[$, on a $u_n - \ell - a_n = o(b^n)$)

Exercice 5.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles vérifiant la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = (4n+2)u_n + u_{n-1}$$

Partie 1 : Structure de $\mathcal{S}$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ muni de l'addition usuelle sur les suites est un groupe commutatif.
2. On munit $\mathbb{R}^2$ de l'addition usuelle sur les couples, c'est-à-dire :

$$\forall ((x,y),(a,b)) \in (\mathbb{R}^2)^2, \quad (x,y)+(a,b) = (x+a, y+b)$$

ce qui fait de $(\mathbb{R}^2, +)$ un groupe. On considère l'application φ qui à une suite de $\mathcal{S}$ associe ses deux premiers termes, i.e. :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \to & (u_0, u_1) \end{array}$$

Montrer que φ est un isomorphisme de groupes.

Partie 2 : Étude de la convergence

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$. On suppose que (u_n) converge. Montrer que sa limite ne peut être que 0.
4. On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{S}$ telles que :

$$a_0 = 1, a_1 = 0 \text{ et } b_0 = 0, b_1 = 1$$

   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \geq 6^{n-1}$.

   (b) Démontrer que (b_n) est croissante.

   (c) Déterminer la limite de (b_n).

   (d) On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_n = a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n$. Montrer que (w_n) est géométrique et en déduire l'expression de w_n uniquement en fonction de n.

   (e) On définit enfin la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $t_n = \dfrac{a_n}{b_n}$. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n - t_{n+1} = \frac{(-1)^n}{b_n b_{n+1}}$$

   (f) Montrer que les suites $(t_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(t_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite que l'on ne cherchera pas à calculer. On note ℓ cette limite.

   (g) Que peut-on en déduire pour la suite (t_n) ?

5. À présent essayons de trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur u_0 et u_1 pour qu'une suite (u_n) de $\mathcal{S}$ converge. Prenons donc une suite $(u_n) \in \mathcal{S}$.

   (a) Démontrer, en se servant de la partie 1 que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 a_n + u_1 b_n$.

   (b) Supposons ici que (u_n) converge. Montrer qu'alors nécessairement $u_0\ell + u_1 = 0$ où ℓ est la limite définie à la question 4.(f).

   (c) Réciproquement, on suppose désormais que $u_0\ell + u_1 = 0$

      i. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\ell - \dfrac{a_n}{b_n}\right| \leq \dfrac{1}{b_n b_{n+1}}$. (*On pourra utiliser le théorème qui a déjà servi en 4.(f)*)

      ii. En déduire que la suite $(a_n - \ell b_n)$ converge et donner sa limite.

      iii. Conclure qu'alors (u_n) converge.