Devoir surveillé 5
Correction

Exercice 1.

1. Par les équivalents et développements limités usuels, on a

$$\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

On a donc $\operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$
Il en résulte

$$\frac{\cos(x)-1}{\operatorname{ch}(x)-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} = -1.$$

On conclut

$$\boxed{\frac{\cos(x)-1}{\operatorname{ch}(x)-1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1.}$$

2. On remarque que $\sin(x\frac{\pi}{2}) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1$. Comme $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, on a donc

$$\ln\Big(\sin(x\frac{\pi}{2})\Big) \underset{x\to 1}{\sim} \sin(x\frac{\pi}{2}) - 1.$$

De la même manière, on a $\ln x \underset{x\to 1}{\sim} x-1$.
Il en résulte

$$\frac{\ln\big(\sin(x\frac{\pi}{2})\big)}{\ln(x)(x-1)} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{\sin(x\frac{\pi}{2})-1}{(x-1)^2}.$$

En posant le changement de variable $x = 1+h$, on se ramène en $h=0$ et par le formulaire trigonométrique, on a

$$\frac{\sin(x\frac{\pi}{2})-1}{(x-1)^2} = \frac{\sin((1+h)\frac{\pi}{2})-1}{h^2} = \frac{\cos(h\frac{\pi}{2})-1}{h^2}.$$

Les équivalents usuels nous donnent $\cos(u) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} -\frac{u^2}{2}$. On a donc

$$\frac{\cos(h\frac{\pi}{2})-1}{h^2} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{-\frac{h^2\pi^2}{4}}{h^2} = -\frac{\pi^2}{4}.$$

On conclut

$$\boxed{\frac{\ln\big(\sin(x\frac{\pi}{2})\big)}{\ln(x)(x-1)} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} -\frac{\pi^2}{4}.}$$

3. On a

$$(\operatorname{ch}(x))^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln \operatorname{ch}(x)}{x^2}}.$$

Comme $\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, on a

$$\ln \operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{\sim} (\operatorname{ch}(x) - 1).$$

Les développements limités usuels donnent

$$\operatorname{ch}(x) - 1 = \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

On a donc

$$\frac{\operatorname{ch}(x)-1}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

On conclut

$$\boxed{(\operatorname{ch}(x))^{\frac{1}{x^2}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^{\frac{1}{2}}.}$$

4. On a
$$(\operatorname{ch}(x))^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln \operatorname{ch}(x)}{x}}.$$
Comme $\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, on a
$$\ln \operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{\sim} (\operatorname{ch}(x) - 1).$$
Les développements limités usuels donnent
$$\operatorname{ch}(x) - 1 = \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$
On a donc
$$\frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = \frac{x}{2}\cdot$$
On a donc $\frac{\ln \operatorname{ch}(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Comme $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, on en déduit
$$e^{\frac{\ln \operatorname{ch}(x)}{x}} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln \operatorname{ch}(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}\cdot$$
On conclut
$$\boxed{(\operatorname{ch}(x))^{\frac{1}{x}} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}\cdot}$$

5. On a
$$\left(1 + \frac{41}{x}\right)^{x(\sqrt{x^2+42x}-x)} = e^{x\ln\left(1+\frac{41}{x}\right)(\sqrt{x^2+42x}-x)}.$$
Comme $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, on a
$$\ln\left(1 + \frac{41}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{41}{x}\cdot$$
On a, de plus, pour $x \geq 0$
$$(\sqrt{x^2 + 42x} - x) = x\left(\sqrt{1 + \frac{42}{x}} - 1\right).$$
Les développements limités usuels nous donnent
$$\sqrt{1+u} - 1 = \frac{u}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u),$$
soit $\sqrt{1+u} - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u}{2}$. On en déduit
$$x\left(\sqrt{1 + \frac{42}{x}} - 1\right) \underset{x\to 0}{\sim} x\frac{42}{2x} = 21.$$
On a donc
$$x\ln\left(1 + \frac{41}{x}\right)(\sqrt{x^2 + 42x} - x) \underset{x\to +\infty}{\sim} x \cdot \frac{41}{x} \cdot 21 = 861.$$
On conclut
$$\boxed{\left(1 + \tfrac{41}{x}\right)^{x(\sqrt{x^2+42x}-x)} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} e^{861}.}$$

Exercice 2.

1. Posons $f(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \sin(t)$, par dérivation, on a

$$\begin{array}{rcl} f'(t) & = & 1 - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24} - \cos(t) \\ f''(t) & = & -t + \dfrac{t^3}{6} + \sin(t) \\ f^{(3)}(t) & = & -1 + \dfrac{t^2}{2} + \cos(t) \\ f^{(4)}(t) & = & t - \sin(t) \\ f^{(5)}(t) & = & 1 - \cos(t) \end{array}$$

La positivité de fonction $f^{(5)}$ sur $\mathbb{R}^+$ et les annulations ponctuelles nous garantissent la stricte croissance de $f^{(4)}$. On a donc
Pour tout $t \geq 0$, $f^{(4)}(t) \geq f^{(4)}(0) = 0$ et égalité seulement pour $t = 0$.
La positivité de fonction $f^{(4)}$ sur $\mathbb{R}^+$ et l'annulation seulement en 0 nous garantissent la stricte croissance de $f^{(3)}$.
Pour tout $t \geq 0$, $f^{(3)}(t) \geq f^{(3)}(0) = 0$ et égalité seulement pour $t = 0$.
La positivité de fonction $f^{(3)}$ sur $\mathbb{R}^+$ et l'annulation seulement en 0 nous garantissent la stricte croissance de $f^{(2)}$.
Pour tout $t \geq 0$, $f^{(2)}(t) \geq f^{(2)}(0) = 0$ et égalité seulement pour $t = 0$.
La positivité de fonction $f^{(2)}$ sur $\mathbb{R}^+$ et l'annulation seulement en 0 nous garantissent la stricte croissance de $f^{(1)}$.
Pour tout $t \geq 0$, $f^{(1)}(t) \geq f^{(1)}(0) = 0$ et égalité seulement pour $t = 0$.
La positivité de fonction $f^{(1)}$ sur $\mathbb{R}^+$ et l'annulation seulement en 0 nous garantissent la stricte croissance de $f^{(0)}$.
Pour tout $t \geq 0$, $f^{(0)}(t) \geq f^{(0)}(0) = 0$ et égalité seulement pour $t = 0$.
La positivité de f et $f^{(2)}$ nous donne directement l'encadrement voulu et on conclut

$$\boxed{\forall t \geq 0,\ t - \tfrac{t^3}{6} \leq \sin(t) \leq t - \tfrac{t^3}{6} + \tfrac{t^5}{120}, \text{ avec égalité seulement si } t = 0.}$$

2. On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\varphi(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sin(t) - t} \mathrm{d}t$$

   (a) L'étude de la question précédente montre que la fonction $t \mapsto \sin(t) - t$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour $x \in$
   R^{+*}, l'intervalle $[x, 2x]$ est inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$. On intègre donc une composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc l'intégrale est bien définie.

   (b) On a montré à la question 1 que $\forall t \geq 0$,

$$-\frac{t^3}{6} \leq \sin(t) - t \leq -\frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120}.$$

   Si $-\frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120}$ est strictement négatif, on peut passer à l'inverse, car tous les nombres en présence sont alors dans $\mathbb{R}^{-*}$. Or

$$-\frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} = -\frac{t^3}{6}\left(1 - \frac{t^2}{20}\right).$$

   Donc pour $t \in]0, \sqrt{20}[$, on a bien

$$-\frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} < 0.$$

   Il en résulte $t \in]0, \sqrt{20}[, \quad -\frac{6}{t^3 - \frac{t^5}{20}} \leq \frac{t^2}{\sin(t) - t} \leq -\frac{6}{t^3} < 0.$
   Comme $t^2 > 0$, on conclut que

$$\boxed{t \in]0, \sqrt{20}[, \quad -\tfrac{6}{t - \frac{t^3}{20}} \leq \tfrac{t^2}{\sin(t) - t} \leq -\tfrac{6}{t} < 0.}$$

   (c) Les comparaisons usuelles nous directement

$$\boxed{\frac{1}{t-\frac{t^3}{20}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}.}$$

(d) On calcule

$$\frac{1}{t-\frac{t^3}{20}} - \frac{1}{t} = \frac{t}{20-t^2}.$$

Comme pour $t \in [x, 2x]$, on a $t \in]0, \sqrt{20}[$, d'où $20 - t^2 >$, on calcule directement

$$\int_x^{2x} \frac{t}{20-t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\ln(20-t^2)\right]_x^{2x} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{20-4x^2}{20-x^2}\right).$$

On conclut

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour } x \in]0, \frac{\alpha}{2}[, \text{ on a } \int_x^{2x} \frac{1}{t-\frac{t^3}{20}} - g(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{20-4x^2}{20-x^2}\right). \\ \text{Il en résulte } \int_x^{2x} \frac{1}{t-\frac{t^3}{20}} - g(t)\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{array}}$$

(e) On calcule directement

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [\ln(t)]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln x = \ln 2.$$

On conclut

$$\boxed{\int_x^{2x} g(t)\mathrm{d}t = \ln 2.}$$

(f) En intégrant l'encadrement de la question 2b, on a

$$\int_x^{2x} -\frac{6}{t-\frac{t^3}{20}}\mathrm{d}t \leq \varphi(x) \leq \int_x^{2x} -\frac{6}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Soit, grâce au calcul précédent, on a

$$-6\left(\int_x^{2x} \frac{1}{t-\frac{t^3}{20}} - g(t)\mathrm{d}t + \int_x^{2x} g(t)\mathrm{d}t\right) \leq \varphi(x) \leq -6\int_x^{2x} g(t)\mathrm{d}t.$$

Par le théorème des gendarmes, on conclut

$$\boxed{\varphi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -6\ln 2.}$$

Exercice 3.

1. On a $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$.

$$\sum_{-n}^{n} e^{ikx} = \begin{cases} 2n+1 & \text{si } e^{ix} = 1 \\ \dfrac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \dfrac{e^{-i(n+\frac{1}{2})x} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{1}{2}x} - e^{i\frac{1}{2}x}} = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} & \text{si } e^{ix} \neq 1 \end{cases}$$

On conclut donc

$$\boxed{D_n(x) = \begin{cases} 2n+1 & \text{si } x \equiv 0[2\pi] \\ \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} & \text{si } x \not\equiv 0[2\pi] \end{cases}.}$$

2.

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} 2k+1 = (n+1)^2 & \text{si } e^{ix} = 1 \\ \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} & \text{si } e^{ix} \neq 1 \end{cases}$$

On a de plus, si $x \not\equiv 0[2\pi]$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((k+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} &= \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}x)} \sum_{k=0}^{n} \sin((k+\frac{1}{2})x) \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}x)} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(e^{i(k+\frac{1}{2})x}) \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}x)} \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i(k+\frac{1}{2})x} \right) \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}x)} \mathrm{Im}\left(\frac{e^{i\frac{1}{2}x} - e^{i(\frac{3}{2}+n)x}}{1-e^{ix}} \right) \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}x)} \mathrm{Im}\left(e^{i(\frac{1}{2}+n)x} \frac{e^{-i(\frac{1}{2}+n)x} - e^{i(\frac{1}{2}+n)x}}{e^{-i\frac{1}{2}x} - e^{i\frac{1}{2}x}} \right) \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}x)} \mathrm{Im}\left(e^{i(\frac{1}{2}+n)x} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} \right) \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}x)} \left(\sin((n+\frac{1}{2})x) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} \right) \\
&= \left(\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{F_n(x) = \left(\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} \right)^2 \text{ si } x \neq 0[2\pi],\ (n+1)^2 \text{ sinon.}}$$

3. (a) Par symétrie de la somme, en utilisant les formules d'Euler, on a

$$\boxed{D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) \text{ qui est réel pour tout } x.}$$

(b) On a, en utilisant le formulaire trigonométrique,

$$\cos(at)\cos(bt) = \frac{1}{2}\left(\cos((a+b)t) + \cos((a-b)t)\right).$$

On a

$$\int_0^{2\pi} \cos((a+b)t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \left[\dfrac{\sin((a+b)t)}{a+b}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } a+b \neq 0 \\ [t]_0^{2\pi} = 2\pi & \text{si } a+b = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos((a-b)t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \left[\dfrac{\sin((a-b)t)}{a-b}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } a-b \neq 0 \\ [t]_0^{2\pi} = 2\pi & \text{si } a-b = 0 \end{cases}$$

Comme $a, b \in \mathbb{N}$, on conclut :

$$\boxed{I(a,b) = \begin{cases} 2\pi & \text{si } a = b = 0 \\ \pi & \text{si } a = b \neq 0 \\ 0 & \text{si } a \neq b. \end{cases}}$$

(c) On a en utilisant la définition de F_n et la reformulation de $D_n(x)$

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} D_k(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(1 + 2\sum_{j=1}^{k} \cos(jx)\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\cos(0x) + 2\sum_{j=1}^{k} \cos(jx)\right)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\cos(mx)F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\cos(0x)\cos(mx) + 2\sum_{j=1}^{k} \cos(jx)\cos(mx) \right).$$

On en déduit
$$\int_0^{2\pi} F_n(x)\cos(mx)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\left(I(0,m) + 2\sum_{j=1}^{k} I(j,m)\right).$$
On distingue de 2 cas :

- $m = 0$ et l'expression de $I(a,b)$ permet de calculer
$$\int_0^{2\pi} F_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\left(I(0,0) + 2\sum_{j=1}^{k} I(j,m)\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(2\pi + 2\sum_{j=1}^{k} 0\right) = 2\pi(n+1).$$
- $m \neq 0$, seul les termes $I(m,j)$ avec $j = m$ sont non nuls et sont égaux à π. On les dénombre, il faut $k \geq m$ et pour chaque valeur de k convenant, le terme apparait 2 fois. Si $n < m$, il n'y a aucun terme convenant, sinon il y en a $n - m + 1$.
  On a donc
$$\int_0^{2\pi} F_n(x)\cos(mx)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } m > n \\ 2(n-m+1)\pi & \text{si } m \leq n \end{cases}.$$
  On

On conclut en divisant par πn
$$\boxed{u_n = \begin{cases} \frac{2(n+1)}{n} & \text{si } m = 0 \\ \frac{2(n-m+1)}{n} & \text{si } m \leq n \\ 0 & \text{si } m > n \end{cases}}$$

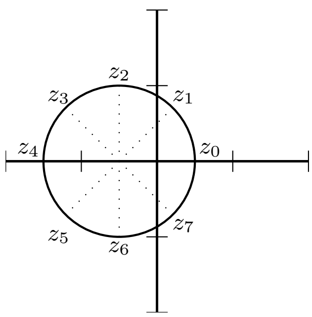
(d) Comme n tend vers $+\infty$ donc dépasse m, on conclut par un passage à la limite dans les 2 premières lignes de la conclusion de la question précédente
$$\boxed{\lim_n u_n = 2.}$$

Exercice 4.

1. En posant le changement de variable $Z = z^2 + z + \frac{1}{4}$, on remarque $z^2 + x + \frac{1}{4}$ est une racine n-ème de l'unité. Il existe donc $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que
$$z^2 + z + \frac{1}{4} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}.$$
On résout alors l'équation
$$z^2 + z + \frac{1}{4} - e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0.$$
On calcule le discriminant et on obtient $\Delta = 4e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \left(2e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)^2$.

Les racines sont donc $z = \frac{-1 \pm 2e^{i\frac{k\pi}{n}}}{2} = -\frac{1}{2} \pm e^{i\frac{k\pi}{n}}$. Quand on "remonte" sans difficulté toutes les manipulations, on a une équivalence et on conclut
$$\boxed{\text{L'équation a } 2n \text{ racines } \left(-\frac{1}{2} \pm e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)_{k\in[\![0,n-1]\!]}.}$$

Pour $n = 4$, on obtient



2. Reformulant les expressions de P_n et I_n avec $(i\sqrt{3})^2 = -3$, on obtient

$$P_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k}(i\sqrt{3})^{2k} \qquad \text{et} \qquad I_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k+1}(i\sqrt{3})^{2k} = \frac{1}{i\sqrt{3}}\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k+1}(i\sqrt{3})^{2k+1}.$$

On fait donc apparaître le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} P_n + i\sqrt{3}I_n &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k}(i\sqrt{3})^{2k} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k+1}(i\sqrt{3})^{2k+1} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{k}(i\sqrt{3})^{k} = (1+i\sqrt{3})^n \end{aligned}$$

Puis comme $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, on a donc

$$P_n + i\sqrt{3}I_n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}.$$

Par identification partie réelle et partie imaginaire, on a

$$\boxed{P_n = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \text{ et } I_n = \frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right).}$$

En traçant le cercle trigonométrique, on conclut que P_n ne s'annule pour aucune valeur de n et I_n est nul si et seulement si n est divisible par 3.