Devoir surveillé 5

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1. Déterminer les limites (éventuellement infinies) aux points indiqués, si elles existent. En cas de limite nulle ou infini, donner un équivalent, le plus simple possible.

1. $\frac{\cos(x)-1}{\mathrm{ch}\,(x)-1}$ en $x=0$.
2. $\frac{\ln\left(\sin(x\frac{\pi}{2})\right)}{\ln(x)(x-1)}$ en $x=1$.
3. $(\mathrm{ch}\,(x))^{\frac{1}{x^2}}$ en $x=0$.
4. $(\mathrm{ch}\,(x))^{\frac{1}{x}}-1$ en $x=0$.
5. $\left(1+\frac{41}{x}\right)^{x(\sqrt{x^2+42x}-x)}$ en $x=+\infty$.

Exercice 2.

1. Montrer que pour $t \geq 0$, on a
$$t-\frac{t^3}{6} \leq \sin(t) \leq t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{120},$$
on précisera les cas d'égalités.
2. On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}^{+*}$ par
$$\varphi(x)=\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sin(t)-t}\mathrm{d}t$$
   (a) Justifier que φ est bien définie.
   (b) Montrer qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour $t \in]0,\alpha[$, on a
$$-\frac{6}{t-\frac{t^3}{20}} \leq \frac{t^2}{\sin(t)-t} \leq -\frac{6}{t}<0.$$
   (c) Déterminer un équivalent simple de $\frac{1}{t-\frac{t^3}{20}}$ en $t=0$, on le notera $g(t)$.
   (d) Pour $x \in]0,\frac{\alpha}{2}[$, calculer $\int_x^{2x} \frac{1}{t-\frac{t^3}{20}}-g(t)\mathrm{d}t$ et montrer que la limite en $x=0$ de cette quantité est nulle.
   (e) Montrer que
$$\int_x^{2x} g(t)\mathrm{d}t=\ln 2.$$
   (f) Justifier que φ admet une limite ℓ en 0^+ que l'on précisera.

Exercice 3. *(La question 3. est indépendante des précédentes.)*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, on définir les fonctions D_n et F_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \quad \textit{et} \quad F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} D_k(x).$$

1. Exprimer $D_n(x)$ de la manière la plus condensée possible.
   (On discutera selon les valeurs de x.)
2. Exprimer $F_n(x)$ de la manière la plus condensée possible.
3. Une suite :
   On fixe $m \in \mathbb{N}$ et on définit la suite (u_n) par

   $$u_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} F_n(x) \cos(mx) \mathrm{d}x.$$

   (a) Justifier que $D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$.

   (b) Pour $a, b \in \mathbb{N}$, calculer

   $$I(a,b) = \int_0^{2\pi} \cos(at)\cos(bt)\mathrm{d}t.$$

   (c) Expliciter la valeur de u_n.

   (d) Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 4. Les 2 questions sont indépendantes :

1. Résoudre sur $\mathbb{C}$

   $$\left(z^2 + z + \frac{1}{4}\right)^n = 1.$$

   On tracera les solutions dans un repère orthonormé pour $n = 4$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère

   $$P_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n}{2k} (-3)^k \qquad \text{et} \qquad I_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{n}{2k+1} (-3)^k.$$

   Déterminer des formes condensées de P_n et I_n. On précisera pour quelle(s) valeur(s) de n, I_n ou P_n s'annulent.