Devoir surveillé 4
Correction

Exercice 1.

1. En effectuant une linéarisation, on a

$$\begin{array}{rcl} I & = & \displaystyle\int_0^\pi x\cos^2(x)\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\int_0^\pi x\frac{1+\cos(x)}{2}\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^\pi x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi x\cos(2x)\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\int_0^\pi x\cos(2x)\mathrm{d}x. \end{array}$$

On effectue alors une intégration par parties$\left\{\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \cos(2x) & v(x) = \frac{\sin(2x)}{2} \end{array}\right.$

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi x\cos(2x)\mathrm{d}x = \left[x\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2x)\mathrm{d}x = 0 - \frac{1}{4}\left[-\cos(2x)\right]_0^\pi = 0.$$

On a

$$J = \int_{-3}^{-1}\frac{t}{t^2+4t+5}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-3}^{-1}\frac{2t+4}{t^2+4t+5}\mathrm{d}t - 2\int_{-3}^{-1}\frac{1}{t^2+4t+5}\mathrm{d}t.$$

On en déduit

$$\begin{array}{rcl} J & = & \displaystyle\frac{1}{2}\left[\ln(t^2+4t+5)\right]_{-3}^{-1} - 2\int_{-3}^{-1}\frac{1}{(t+2)^2+1}\mathrm{d}t \\ & = & \displaystyle\frac{1}{2}[\ln 2 - \ln 2] - 2\left[\arctan(x+2)\right]_{-3}^{-1} \\ & = & -4\arctan(1) = -\pi \end{array}$$

On a

$$K = \int_{-\ln 2}^{\ln 3}\frac{1}{\mathrm{ch}\,(t)}\mathrm{d}t = 2\int_{-\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^t}{1+e^{2t}}\mathrm{d}t.$$

On remarque une forme $\frac{u'(t)}{1+u(t)^2}$, d'où

$$K = \left[2\arctan(e^t)\right]_{-\ln 2}^{\ln 3} = 2\arctan(3) - 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

On conclut

$$\boxed{I = \frac{\pi^2}{4}, \quad J = -\pi \quad \text{et} \quad K = 2\arctan(3) - 2\arctan\left(\tfrac{1}{2}\right).}$$

2. On remarque que $t^2 - 2\cos(\alpha)t + 1 = (t-\cos(\alpha))^2 + \sin^2(\alpha) > 0$, car $\alpha \in]0,\pi[$. On peut donc diviser et on a

$$\frac{\sin(\alpha)}{t^2 - 2\cos(\alpha)t + 1} = \frac{1}{\sin(\alpha)}\frac{1}{\left(\frac{t-\cos(\alpha)}{\sin\alpha}\right)^2 + 1} = \left(\arctan\left(\frac{t-\cos(\alpha)}{\sin\alpha}\right)\right)'.$$

Les solutions de l'équation homogène sont donc $t \mapsto \lambda e^{\arctan\left(\frac{t-\cos(\alpha)}{\sin\alpha}\right)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on remarque que $t \mapsto -1$ est solution de l'équation avec seconde membre et on conclut

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \lambda e^{\arctan\left(\frac{t-\cos(\alpha)}{\sin\alpha}\right)} - 1\,;\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.}$$

3. On ne peut pas composer directement la fonction tangente en K, problème de domaine de définition. La formulaire trigonométrique donne directement

$$\tan\frac{K}{2} = \tan\left(\arctan(3) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}} = 1.$$

Il en résulte $\frac{K}{2} \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$. Puis comme $\arctan 3$ et $\arctan\frac{1}{2}$ sont des éléments de $[0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit $\frac{K}{2}$ est un élément de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et il en découle $\frac{K}{2} = \frac{\pi}{4}$. On conclut donc

$$\boxed{K = \tfrac{\pi}{2}.}$$

Exercice 2.

On cherche à déterminer toutes les fonctions f dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^{2x} f(-x).$$

1. Soit f une solution de l'équation fonctionnelle, comme $f'(x) = e^{2x}f(-x)$, f' est une composée de fonctions dérivables donc dérivable et

$$f''(x) = 2e^{2x}f(-x) - e^{2x}f'(-x).$$

En utilisant l'équation fonctionnelle, on obtient, que pour tout réel x,

$$f'(-x) = e^{2(-x)}f(-(-x)) = e^{-2x}f(x) \qquad \text{et} \qquad f(-x) = e^{-2x}f'(x).$$

Il en résulte

$$f'(x) = 2e^{2x}e^{-2x}f'(x) - e^{2x}e^{-2x}f(x) = 2f'(x) - f(x).$$

La fonction f vérifie donc l'équation différentielle

$$\boxed{f'' - 2f' + f = 0. \quad (E)}$$

2. L'équation caractéristique de l'équation (E) étant $x^2 - 2x + 1 = 0$ qui possède une racine double 1, on conclut que les solutions de (E) sont de la forme

$$\boxed{t \mapsto (At+B)e^t \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.}$$

3. Pour la synthèse, prenons une solution potentielle trouvée à la question précédente soit $f = t \mapsto (At+B)e^t$. Pour f soit solution de l'équation fonctionnelle, il faut que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) - e^{2x}f(-x) = 0.$$

On calcule et on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(Ax + A + B)e^x - e^{2x}(-Ax + B)e^{-x} = 0,$$

soit

$$(2Ax + A)e^x = 0.$$

Si on prend $x = 0$, on obtient $A = 0$ qui est un condition nécessaire, puis on vérifie qu'elle est suffisante. On conclut que les solutions de l'équation fonctionnelle sont les fonctions

$$\boxed{t \mapsto Be^t \text{ avec } B \in \mathbb{R}.}$$

Exercice 3.

1. Montrons le résultat par double inclusion :
Soit $f \in \{x \mapsto Ae^x + Be^{-x}\,;\, A, B \in \mathbb{R}\}$, il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ tel que $f = x \mapsto Ae^x + Be^{-x}$.
Les formules usuelles nous donne $\mathrm{ch}\,(x) + \mathrm{sh}\,(x) = e^x$, en utilisant la parité, on en déduit $\mathrm{ch}\,(x) - \mathrm{sh}\,(x) = e^{-x}$. On a donc
$$f = x \mapsto A(\mathrm{ch}\,(x) + \mathrm{sh}\,(x)) + B(\mathrm{ch}\,(x) - \mathrm{sh}\,(x)) = x \mapsto (A+B)\mathrm{ch}\,(x) + (A-B)\mathrm{sh}\,(x).$$
En posant $C = A + B$ et $D = A - b$, on a donc bien $f \in \{x \mapsto C\mathrm{ch}\,(x) + D\mathrm{sh}\,(x)\,;\, C, D \in \mathbb{R}\}$.
Soit $f \in \{x \mapsto C\mathrm{ch}\,(x) + B\mathrm{sh}\,(x)\,;\, C, D \in \mathbb{R}\}$, il existe donc $C, D \in \mathbb{R}$ tel que $f = x \mapsto C\mathrm{ch}\,(x) + D\mathrm{sh}\,(x)$.
Les formules usuelles nous donnent $\mathrm{ch}\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
$$f = x \mapsto C\frac{e^x + e^{-x}}{2} + D\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{C+D}{2}e^x + \frac{C-D}{2}e^{-x}.$$
En posant $A = \frac{C+D}{2}$ et $B = \frac{C-D}{2}$, on a donc $f \in \{x \mapsto Ae^x + Be^{-x}\,;\, A, B \in \mathbb{R}\}$.
On conclut donc
$$\boxed{\{x \mapsto Ae^x + Be^{-x}\,;\, A, B \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto C\mathrm{ch}\,(x) + D\mathrm{sh}\,(x)\,;\, C, D \in \mathbb{R}\}.}$$

2. A partir des définitions de ch et sh, on calcule (si on ne fait pas d'erreur...)
$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\,(x+y) - \mathrm{ch}\,(x)\mathrm{ch}\,(y) - \mathrm{sh}\,(x)\mathrm{sh}\,(y) &= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$
On conclut
$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(x+y) = \mathrm{ch}\,(x)\mathrm{ch}\,(y) + \mathrm{sh}\,(x)\mathrm{sh}\,(y).}$$

3. En spécialisant, en $x = y = 0$, l'équation fonctionnelle, on obtient
$$2f(0) = 2f(0)^2.$$
Le nombre $f(0)$ est donc solution de $2\alpha = 2\alpha^2$ et on conclut donc bien que
$$\boxed{f(0) \in \{0, 1\}.}$$

4. Si on suppose que la fonction f est solution de $(\mathcal{P})$ et $f(0) = 0$, alors on spécialise l'équation en $y = 0$ et on obtient
$$2f(x) = 2f(0)f(x) = 0.$$
Ceci étant vrai pour tout x, on en déduit que le fonction f est nulle. On vérifie que la fonction nulle est solution de $(\mathcal{P})$.
On conclut
$$\boxed{\text{La seule solution de } (\mathcal{P}) \text{ nulle en 0 est la fonction nulle.}}$$

5. On suppose maintenant que la fonction f est une solution du problème et que $f(0) = 1$.
   (a) Soit spécialisant en $x = 0$, on obtient
   $$f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y) = 2f(y),$$
   soit $f(-y) = f(y)$, si étant vrai pour tout y, on conclut
   $$\boxed{\text{Une solution } f \text{ est une fonction paire.}}$$
   (b) Comme f vérifie $(\mathcal{P})$, on a
   $$f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)f(y) = 0.$$
   On en déduit que les fonctions φ et ψ sont identiquement nulles. Comme f est deux fois dérivables, par les règle de composition des fonctions dérivables, on a φ et ψ 2 fois dérivables. Il en résulte
   $$\varphi''(x) = f''(x+y) + f''(x-y) - 2f''(x)f(y) = 0$$
   $$\psi''(y) = f''(x+y) + f''(x-y) - 2f(x)f''(y) = 0.$$
   En égalisant les 2 membres, on a donc bien

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f''(x)f(y) = f(x)f''(y).}$$

(c) On peut spécialiser le résultat dans la question précédente en $y = 0$ et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x)f(0) = f(x)f''(0),$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = f(x)f''(0).$$

En posant, $\lambda = -f''(0)$, on a bien

$$\boxed{f \text{ solution de } f''(x) + \lambda f(x) = 0 \quad (E).}$$

(d) On a l'équation caractéristique de (E), $\alpha^2 + \lambda = 0$. Les racines sont imaginaires pures et il en résulte que l'ensemble des solutions réelles est

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{x \mapsto A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)\,;\; A, B \in \mathbb{R}\right\}.}$$

Faisons la synthèses pour $(\mathcal{P})$. Si $f(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$, en spécialisant en $x = 0$, on a alors $f(0) = A$, donc $A = 1$.
Puis comme f doit être paire, on a $f(x) = f(-x)$ pour tout x, il résulte

$$\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x) = \cos(\sqrt{\lambda}x) - B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Comme la fonction sin n'est pas identiquement nul, on choisit x tel que $\sin(\sqrt{\lambda}x) \neq 0$, on donc $B = 0$. Il en résulte que f est nécessairement de la forme $f(x) = \cos(\sqrt{\lambda}x)$. On vérifie par le formulaire trigonométrique

$$\cos(\sqrt{\lambda}(x+y)) + \cos(\sqrt{\lambda}(x-y)) - 2\cos(\sqrt{\lambda}x)\cos(\sqrt{\lambda}y) = 0.$$

On conclut que

$$\boxed{\text{si } \lambda = -f''(0) > 0, \text{ alors la seule solution de } (\mathcal{P}) \text{ est } x \mapsto \cos(\sqrt{\lambda}x).}$$

(e) Si $\lambda < 0$, on résout de (E) et en utilisant la question 1., en posant $\gamma = \sqrt{-\lambda}$ on trouve que

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \{x \mapsto A\mathrm{ch}\,(\gamma x) + B\mathrm{sh}\,(\gamma x)\,;\; A, B \in \mathbb{R}\}.}$$

Pour la synthèse, on spécialise en 0 et trouve que nécessairement une solution de $(\mathcal{P})$ est de la forme $x \mapsto \mathrm{ch}\,(\gamma x) + B\mathrm{sh}\,(\gamma x)$. Puis comme f doit être paire, on a $f(x) = f(-x)$ pour tout x, il résulte

$$\mathrm{ch}\,(\sqrt{\lambda}x) + B\mathrm{sh}\,(\sqrt{\lambda}x) = \mathrm{ch}\,(\sqrt{\lambda}x) - B\mathrm{sh}\,(\sqrt{\lambda}x).$$

Comme la fonction sh n'est pas identiquement nul, on choisit x tel que $\mathrm{sh}\,(\sqrt{\lambda}x) \neq 0$, on a donc $B = 0$.
Grâce à la question 2, la fonction obtenue fonctionne et on conclut que

$$\boxed{\text{si } \lambda = -f''(0) < 0, \text{ alors la seule solution de } (\mathcal{P}) \text{ est } x \mapsto \mathrm{ch}\,(\sqrt{-\lambda}x).}$$

Il reste le cas $\lambda = 0$, les solutions de (E) seront de la forme $x \mapsto Ax + B$ et on vérifiera que

$$\boxed{\text{si } \lambda = -f''(0) = 0, \text{ alors la seule solution de } (\mathcal{P}) \text{ est } x \mapsto 1.}$$