Devoir surveillé 4

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1.

1. Calculer les 3 intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi} x\cos^2(x)\mathrm{d}x \qquad J = \int_{-3}^{-1} \frac{t}{t^2+4t+5}\mathrm{d}t \qquad K = \int_{-\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{\mathrm{ch}\,(t)}\mathrm{d}t.$$

   (*pour K, on pourra exprimer* $\mathrm{ch}\,(t)$ *en fonction de* e^t.)

2. Soit $\alpha \in]0,\pi[$ fixé, résoudre sur $\mathbb{R}$,

$$(t^2 - 2\cos(\alpha)t + 1)y'(t) - \sin(\alpha)y(t) = \sin(\alpha).$$

3. Montrer que l'intégrale K de la question 1. vaut $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 2. On cherche à déterminer toutes les fonctions f dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^{2x} f(-x).$$

1. Soit f une solution du problème, montrer que f vérifie une équation différentielle d'ordre 2.
2. Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
3. Conclure.

Exercice 3. On cherche à déterminer toutes les fonctions 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y). \quad (\mathcal{P})$$

1. Justifier que

$$\left\{x \mapsto Ae^{x} + Be^{-x}\,;\, A, B \in \mathbb{R}\right\} = \{x \mapsto C\mathrm{ch}\,(x) + D\mathrm{sh}\,(x)\,;\, C, D \in \mathbb{R}\}\,.$$

2. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, simplifier $\mathrm{ch}\,(x+y) - \mathrm{ch}\,(x)\mathrm{ch}\,(y) - \mathrm{sh}\,(x)\mathrm{sh}\,(y)$.
3. Soit f une solution du problème $(\mathcal{P})$. Montrer $f(0) \in \{0, 1\}$.
4. Montrer qu'il n'y a qu'une solution au problème $(\mathcal{P})$ qui vérifie $f(0) = 0$, la préciser.
5. On suppose maintenant que la fonction f est une solution du problème $(\mathcal{P})$ et que $f(0) = 1$.

   (a) Soit f une solution, étudier la parité de f.

   (b) Montrer que

   $$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f''(x)f(y) = f(x)f''(y).$$

   (à y fixé, on pourra considérer la fonction φ définie par $\varphi(x) = f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)f(y)$ et à x fixé, on pourra considérer la fonction ψ définie par $\psi(y) = f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)f(y)$)

   (c) Montrer que si f est solution alors il existe λ une constante tel que f vérifie l'équation différentielle :

   $$f''(x) + \lambda f(x) = 0 \quad (E).$$

   (d) On suppose que $\lambda > 0$, résoudre (E) puis le problème $(\mathcal{P})$ dans ce cas.

   (e) On suppose que $\lambda \leq 0$, résoudre (E) puis le problème $(\mathcal{P})$ dans ce cas.