Devoir surveillé 3
Correction

Exercice 1.

Montrons les équivalences par une suite d'implications :

$\boxed{(i) \Longrightarrow (ii)}$

Supposons que f est surjective.

Soit $y \in F$, montrons que $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$ par double inclusion.

- Soit $x \in f(f^{-1}(\{y\}))$
  Il existe donc $z \in f^{-1}(\{y\})$, tel que $f(z) = x$. Puis par définition de l'image réciproque $x = f(z) \in \{y\}$.
- Réciproquement, comme f est surjective, il existe $z \in E$, tel que $f(z) = y$, donc $z \in f^{-1}(\{y\})$. Puis $f(z) = y$, d'où $y \in f(f^{-1}(\{y\}))$.

$\boxed{(ii) \Longrightarrow (iii)}$

Supposons que pour tout $y \in F$, $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$.

Fixons $A \in \mathcal{P}(F)$, montrons que $f(f^{-1}(A)) = A$ par double inclusion.

- Soit $x \in f(f^{-1}(A))$
  Il existe donc $z \in f^{-1}(A)$, tel que $f(z) = x$. Puis par définition de l'image réciproque $x = f(z) \in A$.
- Soit $x \in A$.
  Comme $A \subset F$, par hypothèse, on a $f(f^{-1}(\{x\})) = \{x\}$.
  Il existe donc $z \in f^{-1}(\{x\})$, tel que $f(z) = x$. L'élément z est un antécédent de $x \in A$, donc $z \in f^{-1}(A)$, d'où $x = f(z) \in f(f^{-1}(A))$.

$\boxed{(iii) \Longrightarrow (iv)}$

Supposons que pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) = B$.

Soit $A \in \mathcal{P}(F)$, tel que $f^{-1}(A) = \emptyset$. Comme $A = f(f^{-1}(A))$, on a directement $A = f(\emptyset) = \emptyset$.

$\boxed{(iv) \Longrightarrow (i)}$

Par contraposée : Soit la négation de (i) : **Supposons f non surjective.**

Soit $y \in F$, tel que y n'a pas d'antécédent par f. On a donc $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$, puis $f(f^{-1}(\{y\})) = \emptyset$ avec $\{y\} \neq \emptyset$.

Ce qui est exactement la négation de (iv).

Exercice 2.

Exercice 3. [Etude qualitative d'une équation polynomiale]

1. (a) $p1^p = p$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} 1^k = p$. Donc 1 est solution.

   (b) Soit $z \in \mathbb{C}$. On calcule :

$$\begin{aligned}
(z-1)\sum_{k=0}^{p-1}(k+1)z^k &= \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)z^{k+1} - \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)z^k \\
&= \sum_{i=1}^{p} iz^i - \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)z^k \qquad \text{(chgt d'indice } i=k+1\text{)} \\
&= \underbrace{pz^p}_{\text{terme en } i=p} + \underbrace{\sum_{i=1}^{p-1} iz^i - \sum_{k=0}^{p-1} kz^k}_{=0} - \sum_{k=0}^{p-1} z^k \\
&= pz^p - \sum_{k=0}^{p-1} z^k
\end{aligned}$$

   (c) Pour tout $z \neq 1$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
z \text{ solution de } (E_p) &\iff pz^p - \sum_{k=0}^{p-1} z^k = 0 \\
&\iff (z-1)\sum_{k=0}^{p-1}(k+1)z^k = 0 \qquad \text{(question précédente)} \\
&\iff \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)z^k = 0 \qquad (\text{car } z-1 \neq 0)
\end{aligned}$$

   Or, si $z \in \mathbb{R}_+^*$, la somme $\sum_{k=0}^{p-1}(k+1)z^k$ est une somme de nombres strictement positifs. Elle est donc non nulle, et z n'est donc pas solution.

   (d) Pour $p = 3$, la factorisation donne :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad 3z^3 - (1+z+z^2) = (z-1)(1+2z+3z^2)$$

   z est donc solution ssi $z = 1$ ou $1 + 2z + 3z^2 = 0$. Le discriminant de cette dernière équation vaut -8. Ses racines carrées complexes sont $i\sqrt{8} = i2\sqrt{2}$ et $-i2\sqrt{2}$. Les solutions sont donc :

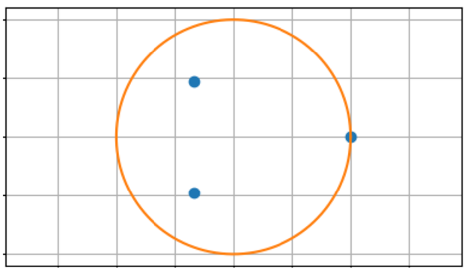
$$\alpha := \frac{-2+i2\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{3}(-1+i\sqrt{2}) \qquad \text{et} \qquad \overline{\alpha} = \frac{1}{3}(-1-i\sqrt{2})$$

   $|\alpha| = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\underbrace{\left(\frac{-1}{\sqrt{3}} + i\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}_{:=\omega\,\in\mathbb{U}}$.

   ω est situé dans le quart nord-ouest du plan complexe, donc $\omega = e^{i\theta}$ pour

$$\boxed{\theta := \text{Arccos}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \pi + \text{Arctan}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{-1}{\sqrt{3}}}\right) = \pi - \text{Arctan}(\sqrt{2})}$$

   Conclusion : les solutions de (E_3) sont 1, $\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\theta}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\theta}$.



2. (a) z est solution de (E_p) donc $pz^p = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{p-1}$, ce qui implique :

$$p = \frac{1}{z^p} + \frac{1}{z^{p-1}} + \frac{1}{z^{p-2}} + \cdots + \frac{1}{z} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{z^k}$$

(b) Prendre le module dans l'égalité précédente donne $p = \left|\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{z^k}\right|$.

Or, par inégalité triangulaire, on a

$$\left|\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{z^k}\right| \leq \sum_{k=1}^{p} \left|\frac{1}{z^k}\right| = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{|z|^k}$$

et comme $|z| > 1$, on a pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $|z|^k > 1$ et donc $\frac{1}{|z|^k} < 1$. Donc cette dernière somme est strictement inférieure à $\sum_{k=1}^{p} 1$, qui vaut p.

D'où $p < p$, **contradiction**.

3. (a) On commence par calculer :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} z^k &= \frac{1-z^p}{1-z} = \frac{1-e^{ip\theta}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{e^{i\frac{p\theta}{2}}.2i\sin(\frac{p\theta}{2})}{e^{i\frac{\theta}{2}}.2i\sin(\frac{\theta}{2})} \quad \text{(angle milieu)} \\ & &= e^{i\frac{(p-1)\theta}{2}} \frac{\sin(\frac{p\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \end{aligned}$$

z est solution de (E_p) donc

$$\begin{aligned} pz^p = \sum_{k=0}^{p-1} z^k \quad \text{donc} \quad pe^{ip\theta} &= e^{i\frac{(p-1)\theta}{2}} \frac{\sin(\frac{p\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \\ \text{donc} \quad e^{i(p-\frac{p-1}{2})\theta} &= \frac{\sin(\frac{p\theta}{2})}{p\sin(\frac{\theta}{2})} \\ \text{donc} \quad e^{i\frac{(p+1)\theta}{2}} &= \frac{\sin(\frac{p\theta}{2})}{p\sin(\frac{\theta}{2})} \end{aligned}$$

(b) Le nombre complexe $e^{i\frac{(p+1)\theta}{2}}$ appartient clairement à $\mathbb{U}$. D'autre part, d'après cette dernière égalité, il appartient aussi à $\mathbb{R}$. Or $\mathbb{U} \cap \mathbb{R} = \{-1, 1\}$ (géométriquement, il s'agit des nombres complexes qui sont à la fois sur la droite réelle et sur le cercle trigonométrique). Il n'y a donc que ces deux valeurs possibles pour $e^{i\frac{(p+1)\theta}{2}}$.

Comme $e^{i\frac{(p+1)\theta}{2}} = 1$ ou -1, on a par passage au carré : $e^{i(p+1)\theta} = 1$, ce qui signifie bien que $z^{p+1} = 1$.

(c) Comme pour toutes les racines $(p+1)$-ièmes de l'unité différentes de 1, on peut écrire pour z :

$$\sum_{k=0}^{p} z^k = \frac{1-z^{p+1}}{1-z} = \frac{1-1}{1-z} = 0$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p} z^k &= \sum_{k=0}^{p-1} z^k + z^p \\ &= p\,z^p + z^p \quad \text{car } z \text{ est solution de } (E_p) \\ &= (p+1)z^p \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=0}^{p} z^k = 0$, on a donc $(p+1)z^p = 0$, ce qui implique $z = 0$. **Contradiction**.

4. (a) $z \neq 1$ donc $\sum_{k=0}^{p-1} z^k = \frac{1-z^p}{1-z}$. Or, z est solution de (E_p), donc :

$$pz^p = \sum_{k=0}^{p-1} z^k = \frac{1-z^p}{1-z}$$

D'où : $1 - z^p = p(1-z)z^p$.

(b) On a donc $1 = p(1-z)z^p + z^p$. En prenant le module dans cette égalité, on a :

$$\begin{aligned} 1 &= |p(1-z)z^p + z^p| \\ &\leq p\,|1-z| \times |z|^p + |z|^p \qquad \text{(inégalité triangulaire et propriétés du module)} \end{aligned}$$

Or, par inégalité triangulaire, $|1-z| \leq |1| + |z| \leq 1 + 1 = 2$. Donc :

$$1 \leq 2p\,|z|^p + |z|^p = (2p+1)\,|z|^p$$

L'inégalité voulue est bien démontrée.

(c) On a donc $|z|^p \geq \frac{1}{2p+1}$, puis $|z| \geq \left(\frac{1}{2p+1}\right)^{1/p}$ (on prend ici une puissance fractionnaire d'une quantité strictement positive).

Cette dernière minoration a été démontrée pour une solution z de (E_p) quelconque. Elle est donc vraie pour *toutes* les solutions de (E_p), et en particulier pour celle qui est de module minimal. D'où : $m_p \geq \left(\frac{1}{2p+1}\right)^{1/p}$.

(d) Comme 1 est solution de (E_p), on a $m_p \leq 1$. D'où :

$$\left(\frac{1}{2p+1}\right)^{1/p} \leq m_p \leq 1$$

Or :

$$\left(\frac{1}{2p+1}\right)^{1/p} = e^{\frac{1}{p}\ln\left(\frac{1}{2p+1}\right)} = e^{-\frac{\ln(2p+1)}{p}}$$

$$\ln(2p+1) = \ln\left(2p\left(1+\tfrac{1}{2p}\right)\right) = \ln(2p) + \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)}_{=:\varepsilon_p} = \ln(2) + \ln(p) + \varepsilon_p.$$

Donc : $\frac{\ln(2p+1)}{p} = \frac{\ln(2)}{p} + \frac{\ln(p)}{p} + \frac{\varepsilon_p}{p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par croissance comparée, et parce que $\varepsilon_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$.
Par continuité de la fonction exp :

$$\left(\frac{1}{2p+1}\right)^{1/p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$$

Finalement, par encadrement, $\boxed{m_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$.

5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Les travaux dans les questions précédentes ont montré que les solutions réelles de (E_p) autres que 1 ne peuvent se trouver que dans l'intervalle $]-1,0[$. De plus, pour tout $t \in]-1,0[$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} t \text{ solution de } (E_p) &\iff pt^p = \frac{1-t^p}{1-t} \\ &\iff p(1-t)t^p + t^p = 1 \\ &\iff (p+1)t^p - pt^{p+1} = 1 \\ &\iff h_p(t) = 1 \end{aligned}$$

Etudions h_p sur $[-1,0]$. Elle est dérivable (fonction polynomiale) et pour tout $t \in [-1,0]$:

$$h_p'(t) = p(p+1)t^{p-1} - p(p+1)t^p = p(p+1)t^{p-1}(1-t)$$

Le signe de h_p' sur $[-1,0]$ dépend de la parité de p.
Si p est impair :

	-1		0
signe de h_p'		$+$	0
variation de h_p		$\nearrow$	0

La fonction h_p est négative sur $[-1, 0]$, et ne vaut donc jamais 1.

Si p est pair :

	-1	0
signe de h'_p	$-$	0
variation de h_p	$2p+1 \searrow$	0

On a $0 = h_p(0) < 1 < h_p(-1) = 2p+1$ et h_p est continue, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $s_p \in]-1, 0[$ tel que $h_p(s_p) = 1$. De plus, h_p est strictement décroissante sur $[-1, 0]$ (sa dérivée est strictement négative, sauf en 0), donc injective. s_p est donc unique.

Conclusion : les solutions réelles de (E_p) sont :

- 1 si p est impair ;
- 1 et s_p si p est pair.

On parlera donc des s_{2p}, pour $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminons leur limite lorsque $p \to +\infty$. On sait, par définition de m_{2p}, que $|s_{2p}| \geq m_{2p}$, ce qui, comme $s_{2p} \leq 0$, signifie $-s_{2p} \geq m_{2p}$. On a donc :

$$-1 \leq s_{2p} \leq -m_{2p}$$

Comme $m_{2p} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, on a par encadrement : $\boxed{s_{2p} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} -1}$

Pour les curieux, voici ci-dessous les solutions de (E_n) représentées dans le plan complexe pour différentes valeurs de n.