Devoir surveillé 3

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Montrer qu'il y a équivalence entre

(i) f surjective.

(ii) $\forall y \in F,\ f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$.

(iii) $\forall A \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(A)) = A$.

(iv) $\forall A \in \mathcal{P}(F),\ f^{-1}(A) = \emptyset \Longrightarrow A = \emptyset$

Exercice 2. Soient E un ensemble, A et B 2 parties de E, on suppose

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cup B \neq E, \quad A \not\subset B \quad \text{et} \quad B \not\subset A.$$

Pour $X \in \mathcal{P}(E)$, on note $\bar{X}$ le complémentaire de X dans E.

On définit

$$A_1 = A \cap B, \quad A_2 = A \cap \bar{B}, \quad A_3 = \bar{A} \cap B \quad et \quad A_4 = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

1. Soit $i \in [\![1, 4]\!]$, montrer que $A_i \neq \emptyset$.
2. Montrer que (A_1, A_2, A_3, A_4) est une partition de E.

Exercice 3. [Etude qualitative d'une équation polynomiale] Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation (E_p) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$pz^p = \sum_{k=0}^{p-1} z^k \qquad (E_p)$$

L'objectif de l'exercice est de comprendre le plus finement possible la localisation des solutions de cette équation dans le plan complexe.
Après les résultats préliminaires de la question **??**, les questions **??** et **??** montrent respectivement que (E_p) n'admet pas de solution de module strictement supérieur à 1 ni de solution de module 1 (autre que 1). La question **??** affine la localisation des solutions dans le disque unité. Enfin la question **??** se penche sur les solutions réelles.
Les questions **??**, **??**, **??** et **??** sont indépendantes.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Vérifier que 1 est solution de (E_p).
   (b) Montrer pour tout $z \in \mathbb{C}$ la factorisation : $pz^p - \sum_{k=0}^{p-1} z^k = (z-1)\sum_{k=0}^{p-1}(k+1)z^k$.
   Conseil : partir de la forme factorisée.
   (c) En déduire que 1 est la seule solution réelle positive de (E_p).
   (d) Toujours à l'aide de la question **??** appliquée à $p = 3$, résoudre (E_3). On exprimera les solutions sous forme trigonométrique (les arguments pourront être donnés avec l'une des fonctions Arcsin, Arccos ou Arctan).
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que (E_p) admet une solution $z \in \mathbb{C}$ telle que $|z| > 1$.
   (a) Vérifier qu'alors : $p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{z^k}$
   (b) En considérant le module dans cette égalité, en déduire une contradiction.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question, on suppose qu'il existe une solution $z \neq 1$ qui est de la forme $z = e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$.
   (a) En calculant $\sum_{k=0}^{p-1} z^k$, montrer : $e^{i\frac{p+1}{2}\theta} = \dfrac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.
   (b) En déduire que $e^{i\frac{p+1}{2}\theta}$ vaut nécessairement 1 ou -1, puis que $z^{p+1} = 1$.
   (c) Montrer que $\sum_{k=0}^{p} z^k = 0$ puis obtenir une contradiction.
4. L'objectif de cette question est de montrer que les solutions de (E_p) "se concentrent sur le bord du disque unité" lorsque $p \to +\infty$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $m_p = \min\{|z|,\ z \text{ solution de } (E_p)\}$, le module minimal parmi les solutions de (Ep). On veut donc montrer que $m_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ une solution de (E_p) différente de 1 (on a alors $|z| < 1$ d'après les questions précédentes).
   (a) Montrer que $1 - z^p = p(1-z)z^p$.
   (b) En déduire que $(2p+1)|z|^p \geq 1$.
   (c) Justifier que $m_p \geq \left(\frac{1}{2p+1}\right)^{1/p}$.
   (d) Conclure.
5. À l'aide de la fonction $h_p : t \mapsto (p+1)t^p - pt^{p+1}$, déterminer le nombre de solutions réelles de (E_p), puis déterminer leur limite quand $p \to +\infty$.