Lycée du Parc **MP2I 861**

2022-2023

Devoir surveillé 1

Exercice 1. [Quelques inégalités]

1. On fait un tableau de signe

x	$-\infty$ -2	-2 0	0 1	1 $+\infty$
$\left\lvert\frac{x}{2}+1\right\rvert$	$-\frac{x}{2}-1$	$\frac{x}{2}+1$	$\frac{x}{2}+1$	$\frac{x}{2}+1$
$\lvert x\rvert$	$-x$	$-x$	x	x
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$
$\lvert x-1\rvert-\lvert x\rvert+\left\lvert\frac{x}{2}+1\right\rvert$	$-\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}+2$	$-\frac{3x}{2}+2$	$\frac{x}{2}$

On traite alors chaque intervalle :

(i) Si $x \in]-\infty,-2]$, il faut $-\frac{x}{2} \geq \frac{3}{2}$, soit $x \leq -3$. On a donc $x \in]-\infty,-3[$.

(ii) Si $x \in [-2,0]$, il faut $\frac{x}{2}+2 \geq \frac{3}{2}$, soit $x \leq -1$. On a donc $x \in]-1,0]$.

(iii) Si $x \in [0,1]$, il faut $-\frac{3x}{2}+2 \geq \frac{3}{2}$, soit $x \leq \frac{1}{3}$. On a donc $x \in [0,\frac{1}{3}[$.

(iv) Si $x \in [1,+\infty[$, il faut $\frac{x}{2} \leq \frac{3}{2}$. On a donc $x \in]3,+\infty[$.

On conclut

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty,-3[\cup]-1,0]\cup[0,\tfrac{1}{3}[\cup]3,+\infty[=]-\infty,-3[\cup]-1,\tfrac{1}{3}[\cup]3,+\infty[.}$$

2. Lemme de Gibbs

(a) Montrer que $\forall x>0, \quad \ln(x) \leq x-1$. On précisera le(s) cas d'égalité. On déduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x)=x-1-\ln x$. On calcule $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ et on déduit le tableau de variations

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

,

conclut donc

$$\boxed{\forall x>0, \quad \ln(x) \leq x-1, \text{ avec égalité si et seulement si } x=1.}$$

(b) Regroupons tous les termes d'un même côté et utilisons l'égalité de la question précédente

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i\ln(q_i)-p_i\ln(p_i) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right)\\
&\leq \sum_{i=1}^{n} p_i\left(\frac{q_i}{p_i}-1\right)\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(q_i-p_i)\\
&\leq \sum_{i=1}^{n} q_i-\sum_{i=1}^{n} p_i = 1-1=0
\end{aligned}$$

On donc bien

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i).}$$

pour que ce soit une égalité, il faut que la somme des inégalités utilisées soit une somme d'égalités, donc $\forall i \in [\![1, n]\!]\,, \quad \frac{q_i}{p_i} = 1$. On conclut donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i) \text{ si et seulement si pour tout } i \in [\![1, n]\!]\,, \quad q_i = p_i.}$$

Exercice 2.

Justifions, dans un premier temps, quelques formules, on a, par définition des fonctions réciproques :

(i) $\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos(x)) = x.$

(ii) $\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin(x)) = x.$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan(x)) = x.$

On a, grâce au formulaire trigonométrique,

$$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2,$$

d'où $\cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Comme arcsin est à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\cos \geq 0$ sur cet intervalle, on en déduit $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$. De même, on a, grâce au formulaire trigonométrique,

$$\sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2,$$

d'où $\sin(\arccos(x)) = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Comme arccos est à valeurs dans $[0, \pi]$ et $\sin \geq 0$ sur cet intervalle, on en déduit $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$. De nouveau, On a, grâce au formulaire trigonométrique,

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2},$$

d'où $\cos(\arctan(x)) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Comme arctan est à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\cos \geq 0$ sur cet intervalle, on en déduit $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Puis on calcule

$$\sin(\arctan(x)) = \tan(\arctan(x)) \cos(\arctan(x)) = x\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Analyse : Soit x une solution de $\arctan(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$. On a alors, en composant par cos,

$$\cos(\arctan(x) + \arcsin(x)) = 0,$$

soit en utilisant le formulaire trigonométrique

$$\cos(\arctan(x)) \cos(\arcsin(x)) - \sin(\arctan(x)) \sin(\arcsin(x)) = 0,$$

puis en utilisant les formules obtenues précédemment

$$\sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} = 0.$$

Par passant au carrée at simplification, on obtient

$$0 = x^4 + x^2 - 1,$$

en posant $X = x^2$, $X^2 + X - 1 = 0$ dont les racines sont $X = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, comme une seule est positive, on obtient $x = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

On a 2 solutions potentielles à l'équation.

Synthèse : En utilisant les opérations usuelles sur les fonctions monotones (arctan et arcsin croissantes), on obtient que la fonction f définie par $f(x) = \arctan(x) + \arcsin(x)$ est strictement croissante sur $[-1, 1]$, d'où

x	-1		0		1
$f(x)$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{4}$

On conclut dont qu'il y a une unique solution et elle est positive $\boxed{\mathcal{S}_1 = \left\{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right\}.}$

Exercice 3.

1. Grâce aux définitions de suites, on calcule

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{(2n+1)!} \leq 0 \tag{1}$$

et

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!} = -\frac{1}{(2n+3)!} + \frac{1}{(2n+2)!} \geq 0 \tag{2}$$

On conclut donc

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante et la suite } (v_n) \text{ est croissante.}}$$

2. On remarque que

$$u_n - v_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{(2n+1)!} \geq 0\cdot$$

Comme la suite (u_n) est décroissante et la suite (v_n) croissante, on a donc pour tout n

$$v_0 \leq v_n \leq u_n \leq u_0.$$

On conclut que

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est minorée par } v_0 \text{ et la suite } (v_n) \text{ est majorée par } u_0.}$$

3. La suite (u_n) est décroissante minorée donc elle converge vers une limite ℓ_1 et on a pour tout n, $u_n \geq \ell_2$. La suite (v_n) est croissante majorée donc elle converge vers une limite ℓ_2 et on a pour tout n, $v_n \leq \ell_2$.
On a de plus

$$u_n - v_n = \frac{1}{(2n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par opérations sur les limites, on a donc $\ell_1 = \ell_2$. On conclut que

$$\boxed{\text{Les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers une même limite } \ell.}$$

4. Les inégalités (1) et (2) sont strictes, on a donc, pour tout n,

$$u_{n+1} < u_n \quad \text{et} \quad v_n < v_{n+1}.$$

Il en résulte, en utilisant les inégalités de la question précédente,

$$v_n < v_{n+1} \leq \ell \leq u_{n+1} < u_n.$$

On conclut que

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n < \ell < u_n.}$$

5. Montrons, par récurrence, que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \leq e^{-x} \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}.$$

On notera

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \quad \text{et} \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$

Initialisation :
Pour $n = 0$, on a par propriété de l'exponentielle, pour $x \geq 0$, $e^{-x} \leq 1 = g_0(x)$.
Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = e^{-x} - f_0(x) = e^{-x} - 1 + x$.
On calcule $h'(x) = -e^{-x} + 1 = 1 - g_0(x) \geq 0$, grâce à la remarque précédente. Le tableau de variations est alors

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	0	$+\infty$

On conclut donc que

$$\boxed{\text{Pour tout } x \geq 0,\ 1 - x \leq e^{-x} \leq x.}$$

La propriété est donc initialisée.
Hérédité :
Supposons que pour un rang n fixé, on a, pour tout $t \geq 0$,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \leq e^{-x} \leq g_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}.$$

Considérons d la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $d(x) = g_{n+1}(x) - e^{-x}$. On calcule alors

$$d'(x) = e^{-x} - \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k k x^{k-1}}{k!} = e^{-x} + \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k x^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Par décalage d'indice et par hypothèse de récurrence, on a donc

$$d'(x) = e^{-x} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} = e^{-x} - f_n(x) \geq 0.$$

Le tableau de variations est alors

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$d'(x)$	$+$
$d(x)$	0 $\nearrow$

On a donc pour tout $x \geq 0$, $d(x) \geq 0$, soit

$$e^{-x} \leq g_{n+1}(x). \quad (\star)$$

De même, on considère m définie sur $\mathbb{R}^+$, par $m(x) = e^{-x} - f_{n+1}(x)$. On dérive

$$m'(x) = -e^{-x} - \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k k x^{k-1}}{k!} = -e^{-x} + \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k x^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Par décalage d'indice et en utilisant l'inégalité obtenu en $(\star)$, on a donc

$$m'(x) = -e^{-x} + \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k x^k}{k!} = -e^{-x} + g_{n+1}(x) \geq 0.$$

Le tableau de variations est alors

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$m'(x)$	$+$
$m(x)$	0 $\nearrow$

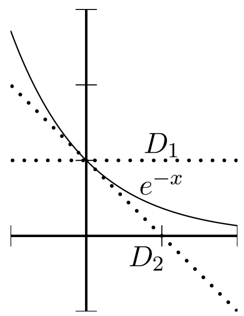
On a donc pour tout $x \geq 0$, $m(x) \geq 0$, soit

$$f_{n+1}(x) \leq e^{-x}.$$

Par initialisation et hérédité, on a

$$\boxed{\text{Pour tout } x \geq 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \leq e^{-x} \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}.}$$

6. Pour $n = 0$,on obtient pour tout $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x} \leq x$.
La courbe de $x \mapsto e^{-x}$ pour $x \geq 0$ est compris entre les droites D_1 et D_2 d'équations $y = 1$ et $y = 1 - x$. on trace



7. En évaluant en $x = 1$, l'inégalité précédente démontrée à la question 5, on obtient, pour tout n

$$v_n \leq e^{-1} \leq u_n.$$

Comme les suites (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ, par passage à la limite, on a

$$\ell \leq e^{-1} \leq \ell$$

On conclut

$$\boxed{\ell = \frac{1}{e}.}$$

8. On remarque que

$$(2n+1)!u_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k (2n+1)!}{k!}$$

et

$$(2n+1)!v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k (2n+1)!}{k!}$$

Or dans les deux sommes $k \leq 2n+1$, on a donc $\frac{(2n+1)!}{k!}$ est un nombre entier. Par stabilité par somme et différence de l'ensemble $\mathbb{Z}$, on a donc

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ (2n+1)!u_n \text{ et } (2n+1)!v_n \text{ sont des nombres entiers.}}$$

9. On calcule

$$(2n+1)!u_n - (2n+1)!v_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k (2n+1)!}{k!} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k (2n+1)!}{k!} = -\frac{(-1)^{2n+1}(2n+1)!}{(2n+1)!} = 1.$$

On conclut donc

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad (2n+1)!u_n - (2n+1)!v_n = 1.}$$

10. Supposons que $\ell = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$
Grâce à la question 4, on a donc pour tout n,

$$v_n < \frac{p}{q} \leq u_n.$$

En multipliant par $(2n+1)!$ et en utilisant la question
efpas1, on a donc

$$A_n = (2n+1)!v_n < (2n+1)!\frac{p}{q} \leq (2n+1)!u_n = (2n+1)!v_n + 1 = A_n + 1.$$

Si on choisit n tel que $2n+1 \geq q$, on a $(2n+1)!\frac{p}{q}$ entier par définition de la factorielle. On obtient donc un entier compris entre strictement ent A_n et $A_n + 1$, or grâce à la question 8, A_n est un nombre entier. Il n'existe pas de nombre entier strictement compris entre deux entiers consécutifs, d'où contradiction. On conclut

$$\boxed{\frac{1}{e} \text{ est un nombre irrationnel.}}$$

Remarque :
En adaptant cette méthode, on peut aisément démontrer que pour couple non nul d'entiers relatifs (a, b), $ae^2 + be$ n'est pas un nombre entier.

Le résultat optimal étant, si $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{(0, \cdot, 0)\}$ alors $\sum_{k=1}^{n} a_k e^k$ n'est pas un nombre entier.

Exercice 4.

1. La dérivation d'un produit nous donne

$$f_n'(x) = \cos(x)^n - nx\sin(x)\cos^{n-1}(x) = \cos^{n-1}(x)(\cos(x) - nx\sin(x)).$$

   On a donc

$$\boxed{f_n'(x) = \cos^{n-1}(x)g_n(x), \text{ où } g_n(x) = \cos(x) - nx\sin(x).}$$

2. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sin(x)$ étant strictement croissantes et positives sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit $x \mapsto -nx\sin(x)$ strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Il en résulte que g_n est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a donc

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g(x)$	1	$\searrow$	$-n\frac{\pi}{2}$

.

3. Grâce à la question précédente, la fonction g_n ne s'annule qu'une seule fois sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ en un point $x_n > 0$. Comme $\cos^{n-1}(x) > 0$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit

x	0		x_n		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(x_n)$	$\searrow$	0

   La lecture du tableau de variation permet donc de conclure

$$\boxed{f_n \text{ admet un maximum en un point } x_n.}$$

4. Comme $x_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x_n) &= \cos(x_n) - (n+1)x_n\sin(x_n) \\ &= \cos(x_n) - nx_n\sin(x_n) - x_n\sin(x_n) = g_n(x_n) - x_n\sin(x_n) = -x_n\sin(x_n) \leq 0. \end{aligned}$$

   Comme g_{n+1} est décroissante (question 2) et $g_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, on en déduit que $x_{n+1} \leq x_n$. On conclut que

$$\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est décroissante.}}$$

5. Comme la suite (x_n) est décroissante minorée par 0, on conclut

$$\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ converge vers une limite } \ell \in [0, \tfrac{\pi}{2}].}$$

6. Comme $g_n(x_n) = 0$, on a

$$\cos(x_n) = nx_n\sin(x_n).$$

   Supposons $\ell \neq 0$, on a donc $\lim_n x_n\sin(x_n) = \ell\sin(\ell) > 0$ (car $\ell \in [0, \frac{\pi}{2}]$). Par passage à la limite, on en déduit

$$\lim_n nx_n\sin(x_n) = +\infty,$$

   or

$$\lim_n \cos(x_n) = \cos(\ell).$$

   Comme $\cos(\ell) \neq +\infty$, c'est contradictoire et on conclut que

$$\boxed{\lim_n x_n = 0.}$$

7. On a
$$\cos(x_n) = n x_n \sin(x_n),$$
il en résulte
$$n x_n^2 = \cos(x_n) \frac{x_n}{\sin(x_n)}.$$
Comme $\lim_n x_n = 0$, on en déduit
$$\lim_n \cos(x_n) = \cos(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_n \frac{x_n}{\sin(x_n)} = 1,$$
Soit $\lim_n n x_n^2 = 1$.
Par positivité, on conclut
$$\boxed{\lim_n u_n = \lim_n x_n \sqrt{n} = 1.}$$

Exercice 5.

1. Si $z_0 = 0$, la suite est constante égale à 0. Si $z_0 \in \mathbb{R}_-^*$, alors $z_1 = 0$ et après la suite est constante. Enfin, si $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$, la suite sera constante.
2. (a) On a :
$$z_{n+1} = \frac{1}{2}(\rho_n e^{i\theta_n} + \rho_n) = \frac{e^{i\theta_n/2}}{2}(e^{i\theta_n/2} + e^{-i\theta_n/2})\rho_n = \cos\frac{\theta_n}{2}\rho_n e^{i\theta_n/2}.$$
Mais $\cos\frac{\theta_n}{2} \geq 0$: on en déduit que $\rho_{n+1} = \cos\frac{\theta_n}{2}\rho_n$, et qu'un argument de z_{n+1} est $\frac{\theta_n}{2}$. Puisque cet argument est dans $]-\pi/2, \pi/2]$, il s'agit de l'argument principal θ_{n+1}.

   (b) Au vu des relations précédentes, on obtient par récurrence immédiate : $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On peut mÍme noter que tous les θ_n seront dans $]-\pi, 0] \cup]0, \pi[$, ce qui assurera que leur sinus est non nul.

   (c) D'après les deux dernières questions, on a pour $n \geq 1$: $\rho_n = \cos\frac{\theta_0}{2^n}\rho_{n-1}$, de sorte que :
$$\rho_n = \cos\frac{\theta_0}{2^n}\cos\frac{\theta_0}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{\theta_0}{2}\rho_0.$$
Maintenant, on a :
$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} = 8\sin\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} = \cdots$$
et ainsi :
$$2^n \rho_n \sin\frac{\theta_0}{2^n} = \rho_0 \sin\theta_0.$$
Bien entendu, on pouvait éviter les « $\cdots$ » avec une micro-récurrence.

   (d) On a :
$$\rho_n = \rho_0 \frac{\sin\theta_0}{2^n \sin\frac{\theta_0}{2^n}} = \rho_0 \frac{\frac{\theta_0}{2^n}}{\sin\frac{\theta_0}{2^n}} \frac{\sin\theta_0}{\theta_0}.$$
Puisque $\sin u \sim u$ et $\frac{\theta_0}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\frac{\sin\frac{\theta_0}{2^n}}{\frac{\theta_0}{2^n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, de sorte que :
$$\rho_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin\theta_0}{\theta_0}\rho_0.$$

Exercice 6. (Facultatif)