Devoir surveillé 1

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1. [Quelques inégalités]

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$
$$|x-1|-|x|+\left|\frac{x}{2}+1\right|>\frac{3}{2}.$$
2. Lemme de Gibbs
   (a) Montrer que $\forall x>0, \quad \ln(x)\leq x-1$. On précisera le(s) cas d'égalité.
   (b) Soient $(p_1,\cdots,p_n)$ et $(q_1,\cdots,q_n)$ deux n-uplets de nombres réels strictement positifs, tel que
$$\sum_{i=1}^{n}p_i=\sum_{i=1}^{n}q_i=1.$$
   Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n}p_i\ln(q_i)\leq\sum_{i=1}^{n}p_i\ln(p_i),$$
   on précisera les cas d'égalités.

Exercice 2.

Résoudre
$$\arctan(x)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}.$$
Toute formule de composition utilisée devra être justifiée.

Exercice 3.

Partie 1 : Etude de deux suites

On définit les suites (u_n) et (v_n) par
$$u_n=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k!}$$
et
$$v_n=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones.

2. Montrer que la suite (u_n) est minorée et la suite (v_n) est majorée.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite ℓ.
4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n < \ell < u_n$.

Partie 2 : Détermination de limite

5. Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \leq e^{-x} \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}.$$
6. Donner une interprétation géométrique pour $n = 0$ de l'inégalité de la question 5. On tracera un graphe.
7. Exprimer la limite ℓ de la partie 1.

Partie 3 : La limite ℓ est irrationnel

8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+1)!u_n$ et $(2n+1)!v_n$ sont des nombres entiers.
9. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $(2n+1)!u_n - (2n+1)!v_n$.
10. Supposer que $\ell = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et arriver à une contradiction.

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par
$$f_n(x) = x \cos^n(x).$$

1. Montrer que la dérivée de f_n peut se mettre sous la forme
$$f_n'(x) = \cos^{n-1}(x) g_n(x),$$
où g_n est une fonction dont on donnera l'expression.
2. Étudier les variations de g_n.
3. Montrer que f_n admet un maximum en un point x_n. (On ne cherchera pas à exprimer x_n)
4. Déterminer le signe de $g_{n+1}(x_n)$ et en déduire le sens de variation de la suite (x_n).
5. Justifier que la suite (x_n) converge vers une limite ℓ.
6. Supposer que $\ell \neq 0$, arriver à une contradiction et conclure.
7. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = x_n\sqrt{n}$ converge vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 5.

Dans cet exercice, on considère une suite de complexes définie par son premier terme $z_0 \in \mathbb{C}$, et la relation $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + |z_n|)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Etudier (rapidement !) la suite $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $z_0 = 0$, puis $z_0 \in \mathbb{R}_-^*$, et enfin $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$.
Dans ce qui suit, on suppose que z_0 n'est pas réel : on choisit de l'écrire $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$, avec $\rho_0 > 0$ et $\theta_0 \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on écrit de même $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$, avec $\rho_n \geq 0$ et $\theta_n \in]-\pi, \pi]$.
2. (a) Trouver une relation simple liant ρ_{n+1} et θ_{n+1} à ρ_n et θ_n.
   (b) Que vaut θ_n ? Quel est son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?
   (c) Ecrire ρ_n sous la forme d'un produit de cosinus, puis montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \rho_0 \sin\theta_0 = 2^n \rho_n \sin\frac{\theta_0}{2^n}.$$
   (d) Montrer que la suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite qu'on déterminera.

Exercice 6. (Facultatif) Résoudre
$$2\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$