Devoir surveillé 1

Exercice 1.

1. En reformulant la somme, on a
$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ |i-j|=1}} ij.$$
On a directement $A_0 = 0$.
Si $n \geq 1$, on sort les termes en $i = 1$ et $i = n$ (on a alors $n \neq 1$), seul cas, où il y a une seule valeur possible de j, pour les autres valeurs, il y a systématiquement $i-1$ et $i+1$
$$\begin{aligned} A_n &= 2 + (n-1)n + \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ |i-j|=1}} ij \\ &= 2 + (n-1)n + \sum_{i=2}^{n-1} i((i-1)+(i+1) \\ &= 2 + (n-1)n + 2\sum_{i=2}^{n-1} i^2 \end{aligned}$$
En utilisant les formules usuelles, on a
$$A_n = 2 + (n-1)n + \frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - 1\right) = \frac{2}{3}n(n-1)(n+1).$$
On conclut
$$\boxed{A_n = \tfrac{2}{3}n(n-1)(n+1).}$$
2. Le faire....
3. Dérivons sans développer l'expression, on a
$$\begin{aligned} f(x) &= (1+e^x)^n \\ f'(x) &= ne^x(1+e^x)^{n-1} \\ f''(x) &= ne^x(1+e^x)^{n-1} + n(n-1)e^{2x}(1+e^x)^{n-2} \\ f'''(x) &= ne^x(1+e^x)^{n-1} + n(n-1)e^{2x}(1+e^x)^{n-2} \\ &\quad +2n(n-1)e^{2x}(1+e^x)^{n-2} + n(n-1)(n-2)e^{3x}(1+e^x)^{n-3} \end{aligned}$$
En développant $f(x)$, on a
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kx}.$$
Dérivons cette expression, on a
$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ke^{kx} \\ f''(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2e^{kx} \\ f'''(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^3e^{kx}. \end{aligned}$$

Avec la deuxième expression de $f'''(x)$, on remarque que

$$f'''(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^3.$$

En utilisant la première, on a

$$f'''(0) = n2^{n-1} + n(n-1) * 2^{n-2} + 2n(n-1)2^{n-2} + n(n-1)(n-2)2^{n-3} = (n^3+3n^2)2^{n-3}.$$

On conclut

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^3 = (n^3+3n^2)2^{n-3}.}$$

Exercice 2.

1. En mettant tout au même dénominateur, on a

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} = \frac{(a+b+c)x^2 + (3a+2b+c)x + 2a}{x(x+1)(x+2)}.$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{x^3+3x^2+2x} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}.$$

Une condition suffisante est donc $a+b+c=0$, $3a+2b+c=0$ et $2a=0$. On résout et obtient

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \frac{1}{x^3+3x^2+2x} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}.}$$

2. On a alors

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+3k^2+k} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \text{(Décalage d'indice)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \text{(Télescopage)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \end{aligned}$$

On conclut que

$$\boxed{U_n = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2(n+1)} + \tfrac{1}{2(n+2)}.}$$

3. Grâce à la question précédente, on obtient

$$\boxed{\lim_n U_n = \tfrac{1}{4}.}$$

4. Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) 2 triplets de réels avec $a_1 \neq a_2$, tel

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x^3+3x^2+2x} = \frac{a_1}{x} + \frac{b_1}{x+1} + \frac{c_1}{x+2} = \frac{a_2}{x} + \frac{b_2}{x+1} + \frac{c_2}{x+2}.$$

On en déduit que

$$\forall x > 0, \quad 0 = \frac{a_1-a_2}{x} + \frac{b_1-b_2}{x+1} + \frac{c_1-c_2}{x+2}.$$

Ce qui implique

$$\forall x > 0, \quad 0 = a_1 - a_2 + \frac{(b_1-b_2)x}{x+1} + \frac{(c_1-c_2)x}{x+2}.$$

On passe alors à la limite en 0^+ et on obtient $a_1 - a_2 = 0$. Ce qui est contradictoire, on a bien unicité de a.

Exercice 3.

Appliquons la méthode du pivot

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & ay & + & z & = & 2 \\ x & + & & & (a+1)z & = & 2 \\ x & + & ay & + & 3z & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc|l} x & - & ay & + & z & = & 2 & \\ & & ay & + & az & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & 2ay & + & 2z & = & 2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1. \end{array}\right.$$

Si $a \neq 0$, le système devient

$$\left\{\begin{array}{ccccccc|l} x & - & ay & + & z & = & 2 & \\ & & y & + & z & = & 0 & L_2 \leftarrow \frac{1}{a} L_2 \\ & & 2ay & + & 2z & = & 2 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc|l} x & - & ay & + & z & = & 2 & \\ & & y & + & z & = & 0 & \\ & & (2a-2)y & & & = & 2 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2. \end{array}\right.$$

On a donc si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, une unique solution $\left(\dfrac{3a-1}{a-1}, \dfrac{1}{a-1}, \dfrac{1}{1-a}\right)$. Si $a = 1$, pas de solution, L_3 est incompatible 0=2.

Si $a = 0$, on a alors le système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & 2 \\ & & 2z & = & 2 \end{array}\right.$$

Le système a alors une infinité de solution avec un degré de liberté sur y et $z = 1$ et $x = 1$. On conclut

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\begin{array}{cc} \emptyset & \text{si } a = 1 \\ \{(1, \lambda, 1) \;;\; \lambda \in \mathbb{R}\} & \text{si } a = 0 \\ \left\{\left(\dfrac{3a-1}{a-1}, \dfrac{1}{a-1}, \dfrac{1}{1-a}\right)\right\} & \text{si } a \neq 1 \text{ et } a \neq 0. \end{array}\right.}$$

Exercice 4.

1. On expérimente quelques valeurs et on conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a-1)u_n = a^{2^{n+1}} - 1$.
   Montrons ce résultat par récurrence.
   Initialisation
   Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 + a$, donc $(a-1)u_0 = a^2 - 1$ et $a^{2^{0+1}} - 1 = a^2 - 1$. La propriété est donc initialisée.
   Hérédité :
   Supposons qu'à un rang n fixé, on a
   $$(a-1)u_n = a^{2^{n+1}} - 1.$$
   On a alors
   $$\begin{aligned} (a-1)u_{n+1} &= (a-1)\prod_{k=0}^{n+1}\left(1 + a^{\left(2^k\right)}\right) \\ &= \left((a-1)\prod_{k=0}^{n}\left(1 + a^{\left(2^k\right)}\right)\right)\left(1 + a^{2^{n+1}}\right) \\ &= (a-1)u_n\left(1 + a^{2^{n+1}}\right) \\ &= \left(a^{2^{n+1}} - 1\right)\left(a^{2^{n+1}} + 1\right) \\ &= \left(\left(a^{2^{n+1}}\right)^2 - 1\right) = \left(a^{2^{n+2}} - 1\right) \end{aligned}$$
   La propriété est donc vrai au rang $n+1$.
   On conclut donc
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a-1)u_n = a^{2^{n+1}} - 1.}$$

2. Pour $a \neq 1$, la question précédente nous permet d'écrire
   $$u_n = \frac{a^{2^{n+1}} - 1}{a-1}.$$

Puis si $a = 1$, on obtient

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + 1) = 2^{n+1}.$$

On conclut donc

$$\boxed{u_n = \begin{cases} \frac{a^{2^{n+1}}-1}{a-1} & \text{si } a \neq 1 \\ 2^{n+1} & \text{si } a = 1. \end{cases}}$$

3. Si $a = 1$, la suite ne converge pas vers une limite finie, car $2^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   Si $|a| < 1$, par les suites géométriques, on a $a^{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la suite (u_n) converge donc vers $\frac{-1}{a-1}$.

   Si $|a| > 1$, la suite ne converge pas vers une limite finie, car $a^{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   Si $a = -1$, on a directement $a^{2^{n+1}} - 1 = 0$ pour tout entier n et donc (u_n) converge vers 0, car identiquement nul.
   On conclut donc

La suite (u_n) converge vers une limite finie si et seulement si $a \in [-1, 1[$. Cette limite est $\frac{1}{1-a}$ si $a \in]-1, 1[$ et 0 si $a = -1$.

Exercice 5.

1. **Premier cas :** $u_{n+1} = \frac{u_n+\frac{1}{3}}{u_n+1}$ et $u_0 = 0$.

   (a) Il faut montrer que $u_n \neq -1$ pour tout entier $n \geq 0$. Il suffit de montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \geq 0$.
   Initialisation : $u_0 = 0$, donc la propriété est vérifiée.
   Hérédité : Si pour $n \geq 0$ fixeé, on a $u_n \geq 0$, alors $u_{n+1} = \frac{u_n+\frac{1}{3}}{u_n+1} \geq 0$. La propriété est donc vérifiée au rang $n + 1$.
   Conclusion : Pour tout entier $n \geq 0$, $u_n \geq 0$.

   (b) Si $x = \frac{x+1/3}{x+1}$, alors $x \neq -1$ et $x^2 + x = x + \frac{1}{3}$. Les solutions sont donc $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

   $$\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \textit{et} \quad \beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}.}$$

   (c) On a

   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{u_{n+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\frac{u_n+\frac{1}{3}}{u_n+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{u_n+\frac{1}{3}}{u_n+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})u_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})u_n + \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \left(\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}\right) \frac{u_n + \frac{1/3-1/\sqrt{3}}{1-1/\sqrt{3}}}{u_n + \frac{1/3+1/\sqrt{3}}{1+1/\sqrt{3}}} \\ &= \left(\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}\right) \frac{u_n - \frac{1}{\sqrt{3}}}{u_n + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \left(\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}\right) v_n \end{aligned}$$

   Conclusion :

   $$\boxed{v_{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}\right) v_n.}$$

(d) On a

$$v_n = \frac{u_n - \frac{1}{\sqrt{3}}}{u_n + \frac{1}{\sqrt{3}}},$$

donc

$$\boxed{u_n = -\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}v_n + \frac{1}{\sqrt{3}}}{v_n - 1}}$$

Comme $v_0 = -1$ et grâce à la question précédente, on a

$$v_n = \left(\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^n v_0 = -\left(\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^n,$$

soit

$$\boxed{u_n = -\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^n + 1}}$$

(e) Comme $0 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, la suite v_n est une suite géometrique de raison $\left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)$ positive strictement plus petite que 1. On conclut donc

$$\boxed{\lim_n v_n = 0.}$$

Puis par passage à la limite dans l'expression $u_n = -\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}v_n + \frac{1}{\sqrt{3}}}{v_n - 1}$, on obtient

$$\boxed{\lim_n u_n = \frac{1}{\sqrt{3}}.}$$

2. **Second cas :** $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n}$

(a) L'équation $x = \frac{x-1}{x}$ est équivalente à $x \neq 0$ et $x^2 - x + 1 = 0$. Le discriminant étant -3, on obtient les solutions

$$\boxed{\alpha = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{u_{n+1} - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{\frac{u_n-1}{u_n} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{u_n-1}{u_n} - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}} = \frac{(1 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2})u_n - 1}{(1 - \frac{1-i\sqrt{3}}{2})u_n - 1} \\
&= \frac{(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})u_n - 1}{(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})u_n - 1} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}u_n - 1}{e^{i\frac{\pi}{3}}u_n - 1} = e^{i\frac{2\pi}{3}}\frac{u_n - e^{i\frac{\pi}{3}}}{u_n - e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}w_n
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{w_{n+1} = e^{i\frac{2\pi}{3}}w_n.}$$

(c) Comme la suite est w_n est géométrique de raison $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, on a

$$w_{n+3} = (e^{i\frac{2\pi}{3}})^3 w_n = e^{i2\pi}w_n = w_n.$$

Conclusion :

$$\boxed{w_{n+3} = w_n, \text{ la suite } w_n \text{ est 3-périodique.}}$$

(d) Comme $w_n = \frac{u_n - e^{i\frac{\pi}{3}}}{u_n - e^{-i\frac{\pi}{3}}}$, on a $u_n = \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}w_n - e^{i\frac{\pi}{3}}}{w_n - 1}$.
La suite w_n étant 3-périodique, on

$$\boxed{u_{n+3} = u_n, \text{ la suite } u_n \text{ est 3-périodique.}}$$