Devoir surveillé 1

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1.

1. Pour un entier $n \geq 1$, calculer une forme réduite de
$$A_n = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ |i-j|=1}} ij.$$
2. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \prod_{k=0}^{n} 4^{k^2+k+1}$, montrer qu'il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}$ tel que la suite (w_n) définie par
$$w_n = \frac{u_n}{861^{a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d}}$$
converge vers une limite finie non nulle. Y-a-t-il unicité du quadruplet (a,b,c,d) ?
3. En dérivant 3 fois la fonction f définie par $f(x) = (1+e^x)^n$ de 2 manières en déduire une forme réduite pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 \binom{n}{k}$.

Exercice 2.

1. Déterminer l'existence de 3 réels a, b, c tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \frac{1}{x^3+3x^2+2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$
2. Simplifier l'expression de la suite U_n définie par
$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+3k^2+2k}.$$
3. Déterminer la limite de U_n.
4. Justifier que le réel a déterminé en 1. est unique. (Il en est de même d'ailleurs de b et c)

Exercice 3.

Résoudre le système

$$\begin{cases} x - ay + z = 2 \\ x + (a+1)z = 2 \\ x + ay + 3z = 4 \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, a désignant un paramètre réel.

Exercice 4.

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite (u_n) par

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + a^{\left(2^k\right)}\right).$$

1. Exprimer sous forme réduite $(a-1)u_n$. *(Une rédaction rigoureuse est attendue.)*
2. Exprimer u_n sous forme réduite.
3. Déterminer pour quelle valeur(s) de a, la suite (u_n) converge vers une limite finie. On précisera la limite.

Exercice 5.

On appelle suite homographique, une suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}. \end{cases}$$

où a, b, c, d sont nombres complexes fixés.

On se propose d'étudier deux cas particuliers :

1. **Premier cas :** $a = c = d = 1$, $b = 1/3$ et $u_0 = 0$.
   (a) Justifier que les termes de la suite u_n sont bien définis.
   (b) Montrer que l'équation $x = \frac{x+1/3}{x+1}$ possède exactement deux solutions réelles dont une positive α ; on notera β la seconde solution.
   (c) On pose $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$, montrer que
   $$v_{n+1} = q\, v_n,$$
   où q est une constante à déterminer.
   (d) Exprimer u_n en fonction de v_n, puis donner une expression de u_n ne dépendant que de n.
   (e) Déterminer la limite de v_n puis celle de u_n.
2. **Second cas :** $a = c = 1$, $b = -1$, $d = 0$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.
   On supposera que u_0 est choisi tel que les termes de la suite u_n sont bien définis.
   (a) Montrer que l'équation $x = \frac{x-1}{x}$ possède exactement deux solutions dont une α de partie imaginaire positive ; on notera β la seconde solution.
   (b) On pose $w_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$, montrer que
   $$w_{n+1} = p\, w_n,$$
   où p est une constante à déterminer.
   (c) Comparer w_{n+3} et w_n.
   (d) Que dire de la suite u_n ?