Devoir Maison 4

A rendre le lundi 25 novembre

Exercice 1. On cherche à déterminer les fonctions y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x^2 y''(x) - 6y(x) = 0. \quad (E)$$

1. Déterminer une fonction polynomiale unitaire solution du problème. C'est-à-dire une fonction y_0 exprimable sour la forme $y_0(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^x$.
2. On suppose $y_1(x) = \lambda(x) y_0(x)$ solution de (E).
   (a) Montrer que la fonction λ vérifie une équation de la forme
   $$a(x)\lambda''(x) + b(x)\lambda'(x) = 0 \quad (E_1),$$
   avec a et b deux fonctions nulles sur $\mathbb{R}$ qu'on déterminera.
   (b) Déterminer les solutions de (E_1).
3. Déterminer l'ensemble des solutions au problème initial obtenu par cette méthode.

Exercice 2.

On définit une suite de fonctions (f_n) de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, par

$$\begin{cases} f_0(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1}(x) = x^{f_n(x)}. \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer un développement asymptotique de f_n à deux termes significatifs simples en 0. C'est-à-dire deux fonctions a_n et b_n d'expressions simples tel que

$$f_n(x) = a_n(x) + b_n(x) + \underset{x \to 0}{o}(b_n(x)),$$

avec $b_n(x) = \underset{x \to 0}{o}(a_n(x))$.

Exercice 3.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x) - x}$.

On considère le n-uplet $u = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et la fonction g_u définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$g_u(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(kx).$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le n-uplet u pour que la fonction g_u admette une limite finie en 0^+.