Devoir Maison 3 Correction

A rendre le mercredi 6 novembre

Exercice 1.

1. La forme trigonométrique de $1-i$ est $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. On en déduit que
$$(1-i)^{861} = 2^{\frac{861}{2}}e^{-i\frac{861\pi}{4}}.$$
Comme l'argument est défini à 2π près et $\frac{861}{4} = 27\cdot 8 - \frac{3}{4}$, on a
$$(1-i)^{843} = 2^{\frac{861}{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$
On a donc $\mathrm{Re}((1-i)^{861}) = 2^{\frac{861}{2}}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2^{\frac{861}{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{430}$ et on conclut
$$\boxed{\mathrm{Re}((1-i)^{861}) = -2^{430}.}$$

2. On a $1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. On en déduit que $2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{\pi}{30}}$ est UNE racine 10-ème de $1+i\sqrt{3}$. On obtient les autres en multipliant par les racines 10-ème de l'unité : $e^{i\frac{k\pi}{5}}$, $k\in[\![0,9]\!]$.
$$\boxed{S = \left\{2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{(6k+1)\pi}{30}}\ ;\ k\in[\![0,9]\!]\right\}}$$

3. En utilisant la question précédente, on a
$$P = \prod_{k=0}^{9} 2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{(6k+1)\pi}{30}} = \left(\prod_{k=0}^{9} 2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{\pi}{30}}\right)\left(\prod_{k=0}^{9} e^{i\frac{k\pi}{5}}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\prod_{k=0}^{9} e^{i\frac{k\pi}{5}}\right).$$
En utilisant les propriétés de l'exponentielle, on a
$$\prod_{k=0}^{9} e^{i\frac{k\pi}{5}} = e^{i\frac{\pi}{5}\sum_{k=0}^{9} k},$$
or on a $\sum_{k=0}^{9} k = \frac{9\cdot 10}{2} = 45$, d'où
$$\prod_{k=0}^{9} e^{i\frac{k\pi}{5}} = e^{9i\pi} = -1.$$
On a donc $P = -1-i\sqrt{3}$. On conclut
$$\boxed{\mathrm{Im}\,(P) = -\sqrt{3}.}$$

Exercice 2.

1. Posons $Z = z+1$. On a donc $Z^n = e^{ia}$. On calcule les racines n-ème de e^{ia} et on trouve
$$Z_k = e^{i\left(\frac{a}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k\in[0,n-1].$$
Les solutions de l'équation sont donc

$$\boxed{z_k = e^{i\left(\frac{a}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} - 1 = 2i\sin\left(\frac{a}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\frac{a}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)}, \quad k \in [0, n-1].}$$

Pour leur modules et leur arguments, regarder le TD.

2. En utilisant la question précédente, on a directement

$$\boxed{P = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2i\sin\left(\frac{a}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\frac{a}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)}\right).}$$

3. En développant par le binôme de Newton, on a

$$P = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k - e^{ia},$$

le terme constant est donc $1 - e^{ia} = -2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\frac{a}{2}}$. Mais on a aussi en développant l'expression factorisée de P, le terme constant est

$$A = \prod_{k=0}^{n-1}\left(-2i\sin\left(\frac{a}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\frac{a}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)}\right) \quad = \quad (-2i)^n e^{i\frac{a}{2}}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\sin\left(\frac{a}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}\right).$$

On a de plus

$$\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = e^{iu_n},$$

où $u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k\pi}{n} = \frac{\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{\pi(n-1)}{2}$.

On a donc

$$\begin{aligned} A &= (-2i)^n e^{i\frac{a}{2}} e^{i\frac{\pi(n-1)}{2}}\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{a}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right) \\ &= (-1)^n 2^n i^{2n-1} e^{i\frac{a}{2}}\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{a}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

En égalisant les 2 formes des termes constants, on a

$$(-1)^n 2^n i^{2n-1} e^{i\frac{a}{2}}\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{a}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right) = -2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\frac{a}{2}},$$

d'où

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{a}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{-2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{(-1)^n 2^n i^{2n-1}} = \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{(-1)^n 2^{n-1} i^{2n}} = \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{2^{n-1}}.$$

En posant $a = 2n\alpha$, on a alors

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\alpha + \frac{k}{n}\pi\right) = \frac{\sin(n\alpha)}{2^{n-1}}.}$$

Pour la seconde, on remarque que

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\alpha + \frac{k}{n}\pi\right) = \frac{\sin(n\alpha)}{2^{n-1}\sin(\alpha)}.$$

On passe alors à la limite en $\alpha = 0$ et on a

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)} = \lim_{\alpha\to 0} n\frac{\sin(n\alpha)}{n\alpha}\frac{\alpha}{\sin(\alpha)} = n.$$

On conclut donc $\boxed{\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.}$

Exercice 3.

Soient un ensemble E et f une application de E dans E tel que

$$f \circ f = f$$

1. Soit $x \in E$, comme $f \circ f = f$, en posant $y = f(x)$, on a
$$f(y) = f(f(x)) = f(x)$$
Comme f est injective, on a $y = x$, d'où $f(x) = x$. Ceci étant vraie pour tout $x \in E$, on a
$$\boxed{f = \mathrm{Id}_E.}$$
2. Soit $y \in E$, comme f est surjective, il existe $x \in E$, tel que $f(x) = y$. Comme $f \circ f = f$, on a
$$f(f(x)) = f(x) = y.$$
D'où $f(y) = y$. Ceci étant vraie pour tout $y \in E$, on a
$$\boxed{f = \mathrm{Id}_E.}$$
3. Sans hypothèse supplémentaire, c'est en général faux.
Si on prend $E = \mathbb{R}$ et la fonction $f = x \mapsto 861$. On a bien $f \circ f = f$, mais $f \neq \mathrm{Id}_E$.

Exercice 4.

1. Montrons que $\sim_1$ est une relation d'équivalence :
   - **Réflexive :** Soit $f \in E^E$, on a $f^1 = f^1$, d'où $f \sim_1 f$.
   - **Symétrique :** Soient $f, g \in E^E$ avec $f \sim_1 g$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $f^n = g^n$. Il en résulte $g^n = f^n$. On a donc $g \sim_1 f$.
   - **Transitive :** Soient $f, g, h \in E^E$ avec $f \sim_1 g$ et $g \sim_1 h$. Il existe donc $n, m \in \mathbb{N}^*$, tel que $f^n = g^n$ et tel que $g^m = h^m$.
   Attention on n'a pas nécessairement $n = m$, par contre $nm \in \mathbb{N}^*$, on en déduit
   $$f^{nm} = (f^n)^m = (g^n)^m = (g^m)^n = (h^m)^n = h^{mn},$$
   donc $f \sim_1 h$.

   Montrons que $\sim_2$ est une relation d'équivalence :
   - **Réflexive :** Soit $f \in E^E$, on a $f^1 = f^1$, d'où $f \sim_2 f$.
   - **Symétrique :** Soient $f, g \in E^E$ avec $f \sim_2 g$. Il existe donc $n, m \in \mathbb{N}^*$, tel que $f^n = g^m$. Il en résulte $g^m = f^n$. On a donc $g \sim_2 f$.
   - **Transitive :** Soient $f, g, h \in E^E$ avec $f \sim_2 g$ et $g \sim_2 h$. Il existe donc $n, m, p, q \in \mathbb{N}^*$, tel que $f^n = g^m$ et tel que $g^p = h^q$.
   Comme $np, mq \in \mathbb{N}^*$, on en déduit
   $$f^{np} = (f^n)^m = (g^m)^p = (g^p)^m = (h^q)^m = h^{mq},$$
   donc $f \sim_2 h$.

   Montrons que $\sim_3$ est une relation d'équivalence :
   - **Réflexive :** Soit $f \in E^E$, on a $f(E) = f(E)$, d'où $f \sim_2 f$.
   - **Symétrique :** Soient $f, g \in E^E$ avec $f \sim_3 g$. On a donc $f(E) = g(E)$ Il en résulte $g(E) = f(E)$. On a donc $g \sim_3 f$.
   - **Transitive :** Soient $f, g, h \in E^E$ avec $f \sim_3 g$ et $g \sim_3 h$. On a donc $f(E) = g(E)$ et $g(E) = h(E)$.
   On en déduit $f(E) = h(E)$
   donc $f \sim_3 h$.

2. (a) Par définition des relations, on remarque que

$$f \sim_1 g \Longrightarrow f \sim_2 g.$$

On a donc

$$\boxed{\forall f \in E^E, \quad f^{\sim_1} \subset f^{\sim_2}.}$$

(b) Montrons que

$$f^{\sim_2} = \bigcup_{g \in f^{\sim_2}} g^{\sim_1}.$$

Par double inclusion,

$\boxed{\subset}$

Soit $h \in f^{\sim_2}$, comme $\sim_1$ est réflexive $h \in h^{\sim_1}$, donc $h \in \bigcup_{g \in f^{\sim_2}} g^{\sim_1}$.

$\boxed{\supset}$

Soit $h \in \bigcup_{g \in f^{\sim_2}} g^{\sim_1}$. Il existe donc $t \in f^{\sim_2}$, tel que $h \sim_1 t$.

Or grâce à la question précédente $h \in t^{\sim_1} \subset t^{\sim_2}$.

On a donc $h \in t^{\sim_2}$ et $t \sim_2 f$. Comme $\sim_2$ transitive, il en résulte $h \sim_2 f$. Il en résulte $h \in f^{\sim_2}$.

On conclut

$$\boxed{f^{\sim_2} = \bigcup_{g \in f^{\sim_2}} g^{\sim_1}.}$$

(c) Soit $g \in f^{\sim_1}$ surjective. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = g^n$.

Comme la composée de fonctions surjectives est surjective, g^n est surjective.

Il en résulte que $f^n = f \circ f^{n-1}$ est surjective. Quand une composée est surjective, l'application de gauche est surjective. Il en résulte que f est surjective.

Soit $g \in f^{\sim_1}$ injective. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = g^n$.

Comme la composée de fonctions injectives est injective, g^n est injective.

Il en résulte que $f^n = f^{n-1} \circ f$ est injective. Quand une composée est injective, l'application de droite est injective. Il en résulte que f est injective.

(d) Soit $g \in f^{\sim_3}$ surjective. On a donc $f(E) \overset{\text{car } g \sim_3 f}{=} g(E) \overset{\text{car } g \text{ surjective}}{=} E$. Il en résulte que f est surjective.

L'injectivité ne donne aucune information.

Contre-exemple : $E = \mathbb{R}$ et $f = x \mapsto x^3 - x$ et $g = x \mapsto x$.

On vérifie que g injective, f non injective. On a, par contre, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = g(\mathbb{R})$. (Le vérifier !)

Intégrales de Wallis

1. On a

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = 1, \qquad I_2 = \frac{\pi}{4}}$$

2. Utilisons l'indication :

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) - \cos^{n+2}(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(x))\cos^n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^n(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Par l'intégration par parties suivante (les fonctions considérées sont bien continues et de dérivées continues)

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(x) = \sin(x) & u'(x) = \cos(x) \\ v'(x) = \sin(x)\cos^n(t) & v(x) = -\frac{1}{n+1}\cos(x)^{n+1}, \end{array} \right.$$

on obtient
$$\begin{aligned} I_n - I_{n+2} &= \left[\sin(x)\left(-\frac{1}{n+1}\right)\cos(x)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1} I_{n+2}. \end{aligned}$$
Soit
$$I_n = \frac{n+2}{n+1} I_{n+2},$$
on a donc bien
$$\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.}$$

3. En multipliant l'égalité précédente par $(n+2)I_{n+1}$, on obtient
$$(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n.$$
Par une récurrence immédiate,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+1)I_{n+1}I_n = I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}.}$$

4. Prouvons les 2 propriétés par récurrence.
Pour la première, on a
$$\frac{\pi}{2} = I_0 = I_{2\cdot 0} = \frac{(2\cdot 0)!}{2^{2\cdot 0}(0!)^2}\frac{\pi}{2}. \text{ Rappel, on a } 0! = 1.$$
L'initialisation est donc vérifiée pour $p = 0$.
Pour l'hérédité, supposons que la propriété est vérifiée au rang $p \geq 0$:
$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}.$$
On a alors au rang $p+1$, grâce à la relation trouvée à la question 2.
$$I_{2(p+1)} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p}.$$
En utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit
$$I_{2(p+1)} = \frac{2p+1}{2p+2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{2p+2}{2\cdot(p+1)}\frac{2p+1}{2(p+1)}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2},$$
soit
$$I_{2(p+1)} = \frac{(2(p+1))!}{2^{2p+2}((p+1)!)^2}\frac{\pi}{2}.$$
La propriété est vérifiée au rang $p+1$, donc pour tout rang $p \geq 0$.
On conclut donc
$$\boxed{\forall p \geq 0, \qquad I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}.}$$
Pour la seconde, on a
$$1 = I_1 = I_{2\cdot 0+1} = \frac{2^{2\cdot 0}(0!)^2}{(2\cdot 0+1)!}.$$
L'initialisation est donc vérifiée pour $p = 0$.
Pour l'hérédité, supposons que la propriété est vérifiée au rang $p \geq 0$:
$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$
On a alors au rang $p+1$, grâce à la relation trouvée à la question 2.
$$I_{2(p+1)+1} = \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit

$$I_{2(p+1)+1} = \frac{2p+2}{2p+3}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2(p+1)}{2p+2}\frac{2(p+1)}{2p+3}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!},$$

soit

$$I_{2(p+1)+1} = \frac{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}{(2(p+1)+1)!}.$$

La propriété est vérifiée au rang $p+1$, donc pour tout rang $p \geq 0$.
On conclut donc

$$\boxed{\forall p \geq 0, \qquad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.}$$

5. Comme $0 \leq \cos(x) \leq 1$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$0 \leq \cos(x)^{n+2} \leq \cos^{n+1}(x) \leq \cos^n(x).$$

En intégrant sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^{n+2}\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x.$$

Soit

$$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n,$$

D'où grâce à la question 2,

$$\frac{n+1}{n+2}I_n \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

Comme $I_n \geq 0$,

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, par encadrement, on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.}$

6. On a $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, grâce à la question 3, d'où en utilisant la question 5.

$$nI_n^2 = nI_nI_{n-1}\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{\pi}{2}\frac{I_n}{I_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2},$$

soit comme $I_n \geq 0$, par passage à la racine,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

7. En utilisant la question 5, on a

$$\lim_{p\to+\infty} \sqrt{2p+1}I_{2p+1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Donc

$$\lim_{p\to+\infty} (2p+1)I_{2p+1}^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Soit grâce à la question 3,

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} 2p\left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.}$$