Devoir Maison 3

A rendre le mercredi 6 novembre

Exercice 1.

1. Déterminer la partie réelle de $(1-i)^{861}$.
2. Exprimer, sous forme exponentielles, les racines 10-ème de $1+i\sqrt{3}$.
3. Soit P le produit des racines 10-ème de $1+i\sqrt{3}$, déterminer la partie imaginaire de P.
4. Pour quel entier n, a-t-on $(1+i\sqrt{3})^n \in \mathbb{R}^-$?

Exercice 2. Pour $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$, on considère l'équation

$$(1+z)^n = e^{ia}. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions de (E), ainsi que leurs modules et leurs arguments.
2. Factoriser le polynôme $P = (X+1)^n - e^{ia}$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer des formes réduites de

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\alpha + \frac{k}{n}\pi\right)$$

et

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k}{n}\pi\right).$$

Exercice 3. Soient un ensemble E et f une application de E dans E tel que

$$f \circ f = f$$

1. On suppose f injective. Montrer que $f = \mathrm{Id}_E$.
2. On suppose f surjective. Montrer que $f = \mathrm{Id}_E$.
3. Sans hypothèse supplémentaire, peut-on conclure que $f = \mathrm{Id}_E$?

Exercice 4. Équivalences sur E^E

Soit E un ensemble non vide. On considère les relations sur $F = E^E$ et pour $f \in F$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{\text{n fois}}$.

Pour $f, g \in F$, on définit les relations

- $f \sim_1 g \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n = g^n$
- $f \sim_2 g \quad \Leftrightarrow \quad \exists n, m \in \mathbb{N}^*, \quad f^n = g^m$
- $f \sim_3 g \quad \Leftrightarrow \quad f(E) = g(E)$

1. Montrer que $\sim_1$, $\sim_2$, $\sim_3$ sont des relations d'équivalence.
2. Pour $f \in F$, on note $f^{\sim_1}$, $f^{\sim_2}$, $f^{\sim_3}$ les classes d'équivalence de f modulo $\sim_1$, $\sim_2$, $\sim_3$.
   (a) Comparer $f^{\sim_1}$ et $f^{\sim_2}$.
   (b) Montrer que toute classe d'équivalence pour $\sim_2$ est réunion de classes d'équivalence pour $\sim_1$.
   (c) Que pouvez-vous dire de f s'il existe $g \in f^{\sim_1}$ injective ? surjective ?
   (d) Même question avec $f^{\sim_3}$.

Intégrales de Wallis

Pour un entier $n \geq 0$, on définit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Montrer que $\forall n \geq 0, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. (On pourra regarder la quantité $I_n - I_{n+2}$)
3. Montrer que la quantité $(n+1)I_{n+1}I_n$ est indépendante de n, on déterminera sa valeur.
4. Montrer que
$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$
5. Montrer que la suite (I_n) est monotone et en déduire que
$$\lim_n \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.$$
6. En déduire que
$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
7. Conclure des résultats précédents que
$$\lim_{p \to +\infty} (2p+1) \frac{2^{4p}(p!)^4}{(2p+1)!^2} = \frac{\pi}{2}.$$