Devoir Maison 1 Correction

A rendre le vendredi 4 octobre

Exercice 1.

Justifions, dans un premier temps, quelques formules, on a, par définition des fonctions réciproques :

(i) $\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\arccos(x)) = x$.

(ii) $\forall x \in [-1,1], \quad \sin(\arcsin(x)) = x$.

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan(x)) = x$.

On a, grâce au formulaire trigonométrique,

$$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2,$$

d'où $\cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Comme arcsin est à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\cos \geq 0$ sur cet intervalle, on en déduit $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$. De même, on a, grâce au formulaire trigonométrique,

$$\sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2,$$

d'où $\sin(\arccos(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Comme arccos est à valeurs dans $[0, \pi]$ et $\sin \geq 0$ sur cet intervalle, on en déduit $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$. De nouveau, On a, grâce au formulaire trigonométrique,

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2},$$

d'où $\cos(\arctan(x)) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Comme arctan est à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\cos \geq 0$ sur cet intervalle, on en déduit $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Puis on calcule

$$\sin(\arctan(x)) = \tan(\arctan(x))\cos(\arctan(x)) = x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Analyse : Soit x une solution de $\arctan(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$. On a alors, en composant par cos,

$$\cos(\arctan(x) + \arcsin(x)) = 0,$$

soit en utilisant le formulaire trigonométrique

$$\cos(\arctan(x))\cos(\arcsin(x)) - \sin(\arctan(x))\sin(\arcsin(x)) = 0,$$

puis en utilisant les formules obtenues précédemment

$$\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = 0.$$

Par passant au carrée et simplification, on obtient

$$0 = x^4 + x^2 - 1,$$

en posant $X = x^2$, $X^2 + X - 1 = 0$ dont les racines sont $X = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, comme une seule est positive, on obtient $x = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

On a 2 solutions potentielles à l'équation.

Synthèse : En utilisant les opérations usuelles sur les fonctions monotones (arctan et arcsin croissantes), on obtient que la fonction f définie par $f(x) = \arctan(x) + \arcsin(x)$ est strictement croissante sur $[-1, 1]$, d'où

x	-1		0		1
$f(x)$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{4}$

Par le théorème de la bijection par continuité et stricte monotonie, on conclut dont qu'il y a une unique solution et elle est positive

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = \left\{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right\}.}$$

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

Pour l'inégalité de droite, on définit $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln x$. On dérive et on obtient $f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = -\frac{-(x+1)-x^2+x(x+1)}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x^2(x+1)}$. On en déduit le tableau de variations

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$
$f(x)$		$\searrow$	0

Pour le calcul de la limite en $+\infty$, on lève l'indétermination par

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln x = \frac{1}{x} - \ln(1 + \frac{1}{x}).$$

On conclut donc que l'inégalité de droite est vraie.
Pour celle de gauche, on peut étudier la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln x$ et on obtient la même chose.
On conclut

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.}$$

2. En utilisant, la question précédente, on a pour tout $k \geq 1$
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$
Par sommation, on a donc
$$\sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=n}^{pn} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k}.$$
Soit par télescopage et définition de (u_n), il en résulte
$$u_n + \frac{1}{pn+1} - \frac{1}{n} \leq \ln(np+1) - \ln n \leq u_n.$$
On en déduit que
$$\ln\left(p + \frac{1}{n}\right) \leq u_n \leq \ln\left(p + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{pn+1} + \frac{1}{n}.$$
Par le théorème des gendarmes, on peut donc conclut
$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln p.}$$

Exercice 3.

1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\} =]-\infty, -1[\cup] - 1, 0[\cup]0, +\infty[$ et elle est dérivable par les règles de composition usuelle, on calcule alors
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\frac{1}{x^3}}{1 + \left(\frac{1}{2x^2}\right)^2} - \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{1 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2} + \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \left(\frac{x-1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{-4x}{4x^4+1} - \frac{1}{(x+1)^2 + x^2} + \frac{1}{x^2 + (x-1)^2} \\ &= \frac{-4x}{4x^4+1} - \frac{1}{2x^2+2x+1} + \frac{1}{2x^2-2x+1} \\ &= \frac{-4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)} = 0. \end{aligned}$$
La dérivée de la fonction f est donc nulle, la fonction f est donc constante sur chaque intervalle, où elle est définie. On a calcule
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1.$$
Par composition des limites, on a donc
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$
De même, comme
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2x^2} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Par composition des limites, on a donc

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \pi.$$

On conclut donc

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\\ \pi & \text{si } x \in]-1, 0[. \end{cases}}$$

2. Comme dans la somme, $k \in \mathbb{N}^*$, on peut utiliser l'expression de f sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour obtenir

$$\arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) \\
&= \sum_{\ell=2}^{n+1} \arctan\left(\frac{\ell-1}{\ell}\right) - \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) && \text{(Décalage d'indice)} \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} \arctan\left(\frac{k-1}{\ell}\right) - \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) && \text{(Télescopage)}
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, on conclut donc

$$\boxed{S_n = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{4}.}$$

Exercice 4.

1. La dérivation d'un produit nous donne

$$f_n'(x) = \cos(x)^n - nx\sin(x)\cos^{n-1}(x) = \cos^{n-1}(x)(\cos(x) - nx\sin(x)).$$

On a donc

$$\boxed{f_n'(x) = \cos^{n-1}(x)g_n(x), \text{ où } g_n(x) = \cos(x) - nx\sin(x).}$$

2. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sin(x)$ étant strictement croissantes et positives sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit $x \mapsto -nx\sin(x)$ strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Comme cos est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, il en résulte que g_n est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a donc

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g(x)$	1	$\searrow$	$-n\frac{\pi}{2}$

.

3. Grâce à la question précédente, par la théorème de la bijection, la fonction continue et strictement monotone g_n ne s'annule qu'une seule fois sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ en un point $x_n > 0$. Comme $\cos^{n-1}(x) > 0$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit

x	0		x_n		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(x_n)$	$\searrow$	0

   La lecture du tableau de variation permet donc de conclure

   $$\boxed{f_n \text{ admet un maximum en un point } x_n.}$$

4. Comme $x_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

   $$g_{n+1}(x_n) = \cos(x_n) - (n+1)x_n \sin(x_n)$$
   $$= \cos(x_n) - nx_n \sin(x_n) - x_n \sin(x_n) = g_n(x_n) - x_n \sin(x_n) = -x_n \sin(x_n) \leq 0 = g_{n+1}(x_{n+1}).$$

   Comme g_{n+1} est décroissante (question 2) et $g_{n+1}(x_n) \leq g_{n+1}(x_{n+1})$, on en déduit que $x_{n+1} \leq x_n$. On conclut que

   $$\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est décroissante.}}$$

5. Comme la suite (x_n) est décroissante minorée par 0, on conclut

   $$\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ converge vers une limite } \ell \in [0, \tfrac{\pi}{2}].}$$

6. Comme $g_n(x_n) = 0$, on a
   $$\cos(x_n) = nx_n \sin(x_n).$$
   Supposons $\ell \neq 0$, on a donc $\lim_n x_n \sin(x_n) = \ell \sin(\ell) > 0$ (car $\ell \in [0, \frac{\pi}{2}]$). Par passage à la limite, on en déduit
   $$\lim_n nx_n \sin(x_n) = +\infty,$$
   or
   $$\lim_n \cos(x_n) = \cos(\ell).$$
   Comme $\cos(\ell) \neq +\infty$, c'est contradictoire et on conclut que

   $$\boxed{\lim_n x_n = 0.}$$

7. On a

$$\cos(x_n) = nx_n \sin(x_n),$$

il en résulte

$$nx_n^2 = \cos(x_n)\frac{x_n}{\sin(x_n)}.$$

Comme $\lim\limits_n x_n = 0$, on en déduit

$$\lim_n \cos(x_n) = \cos(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_n \frac{x_n}{\sin(x_n)} = 1,$$

Soit $\lim\limits_n nx_n^2 = 1$.

Par positivité, on conclut

$$\boxed{\lim_n u_n = \lim_n x_n\sqrt{n} = 1.}$$