Devoir Maison 1

A rendre le vendredi 4 octobre

Exercice 1.

Résoudre
$$\arctan(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Toute formule de composition utilisée devra être justifiée.

Exercice 2.

Pour $p \in \mathbb{N} \setminus (0,1)$, on définit la suite (u_n) par $n \geq 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a
$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$
2. Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite à préciser.

Exercice 3. On considère la fonction la fonction f définie par $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

1. Simplifier l'expression de f.
2. En déduire que la suite (S_n) définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$ converge vers une limite à préciser.

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par
$$f_n(x) = x\cos^n(x).$$

1. Montrer que la dérivée de f_n peut se mettre sous la forme
$$f_n'(x) = \cos^{n-1}(x) g_n(x),$$
où g_n est une fonction dont on donnera l'expression.
2. Étudier les variations de g_n.
3. Montrer que f_n admet un maximum en un point x_n. (On ne cherchera pas à exprimer x_n)
4. Déterminer le signe de $g_{n+1}(x_n)$ et en déduire le sens de variation de la suite (x_n).
5. Justifier que la suite (x_n) converge vers une limite ℓ.
6. Supposer que $\ell \neq 0$, arriver à une contradiction et conclure.
7. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = x_n\sqrt{n}$ converge vers une limite que l'on déterminera.