Devoir Maison 1 Correction

A rendre le vendredi 13 septembre

Exercice 1.

1. En utilisant la formule du binôme de Newton, on a

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=2^n.}$$

2. A partir des définitions des binomiaux, on calcule

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}}=\frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}}=\frac{n}{k}.$$

On a donc

$$\boxed{\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}}=\frac{n}{k}.}$$

3. En utilisant la question précédente, on a

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}.$$

En décalant l'indice, on a donc

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}.$$

On conclut donc avec la première question de l'exercice :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}.}$$

Exercice 2.

1. Etudions sur $\mathbb{R}^+$ la fonction g définie par $g(t)=\sin(t)-t$. On a $g'(t)=\cos(t)-1\leq 0$, il en résulte donc

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	0 $\searrow$

Il n'est pas nécessaire de faire une étude plus précise, on a directement

$$\forall t\geq 0,\quad \sin(t)-t\leq 0.$$

La première inégalité est donc démontrée. On peut réitérer les procédés en considérant les fonctions g_1, g_2 et g_3 définies par

$$g_1(t) = \cos(t) - 1 + \frac{t^2}{2},$$
$$g_2(t) = \sin(t) - t + \frac{t^3}{6},$$
$$g_3(t) = \cos(t) - 1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4}.$$

On peut aussi faire de l'intégration d'inégalité.
On a $\forall t \geq 0, \quad \cos(t) \leq 1$. Puis pour $t \geq 0$, en intégrant l'inégalité $\sin(u) \leq u$ sur $[0, t]$, on obtient

$$[-\cos(u)]_0^t \leq \int_0^t u\mathrm{d}u,$$

d'où $\forall t \geq 0, \quad 1 - \cos(t) \leq \frac{t^2}{2}$, soit $\forall t \geq 0, \quad 1 - \dfrac{t^2}{2} \leq \cos(t)$.
On donc dans un premier temps

$$\forall t \geq 0, \qquad \begin{aligned} \sin(t) &\leq t \\ 1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t) &\leq 1 \end{aligned}$$

On peut intégrer le deuxième encadrement encadrement et pour $x \geq 0$, on obtient

$$\int_0^x 1 - \frac{t^2}{2}\mathrm{d}t \leq \int_0^x \cos(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^x 1\mathrm{d}t,$$

soit

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x.$$

On a donc le première encadrement voulu. On réintègre une seconde fois et on obtient, pour $x \geq 0$,

$$\int_0^x t - \frac{t^3}{6}\mathrm{d}t \leq \int_0^x \sin(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^x t\mathrm{d}t,$$

soit

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \leq 1 - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

On conclut donc bien

$$\boxed{\forall t \geq 0, \qquad \begin{aligned} t - \tfrac{t^3}{6} \leq \sin(t) &\leq t \\ 1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t) &\leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}. \end{aligned}}$$

2. En utilisant le première encadrement de la question précédente, on a pour $k \in [\![1, n]\!]$

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \leq \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2},$$

donc en sommant sur k

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}.$$

Il en résulte

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, on a donc

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq u_n \leq \frac{n+1}{2n}.$$

On de plus

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} k^3 \leq n \cdot n^3 = n^4.$$

On en déduit que

$$0 \leq \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^{n} k^3 \leq \frac{1}{6n^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. On peut conclure en utilisant le théorème des gendarmes :

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \tfrac{1}{2}.}$$

Par une méthode similaire en utilisant le 2ème encadrement, on encadre v_n et on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} -\frac{k^2}{2n^3} \leq v_n \leq \sum_{k=1}^{n} -\frac{k^2}{2n^3} + \frac{k^4}{24n^6},$$

soit

$$-\frac{1}{2n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \leq v_n \leq \frac{1}{2n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{24n^6} \sum_{k=1}^{n} k^4.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on a donc

$$-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^2} \leq v_n \leq -\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^2} + \frac{1}{24n^6} \sum_{k=1}^{n} k^4.$$

On de plus

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} k^4 \leq n \cdot n^4 = n^5.$$

On en déduit que

$$0 \leq \frac{1}{24n^6} \sum_{k=1}^{n} k^4 \leq \frac{1}{24n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme $\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = (1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2$. On peut conclure en utilisant le théorème des gendarmes :

$$\boxed{v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\tfrac{1}{6}.}$$

Exercice 3.

1. En reformulant la somme, on a

$$\begin{aligned}
u_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i \quad (j \text{ est indépendant de } i.) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} \quad \text{(formule usuelle)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{(j+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{n(n+3)}{4}
\end{aligned}$$

On conclut donc $\boxed{u_n = \frac{n(n+3)}{4}}$. On remarque que les entiers n et $n+3$ sont de parité différente, donc le produit $n(n+3)$ est un entier pair. Il en résulte que $2n(n+3)$ est toujours divisible par 4, $2u_n$ est un nombre entier pour tout n. Puis $u_2 = \frac{5}{2}$, donc l'entier $q = 1$ ne convient pas, on conclut donc

$\boxed{q = 2 \text{ est le plus petit entier strictement positif tel que } qu_n \text{ est un nombre entier pour tout entier } n.}$

Exercice 4.

Appliquons la méthode du pivot de Gauss pour résoudre ce système.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & my & + & 2z & = & m \\ -2x & + & y & + & (m-2)z & = & 1 \\ mx & + & y & + & 2z & = & 2m-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc|c} x & + & my & + & 2z & = & m & L_1 \\ & & (1+2m)y & + & (m+2)z & = & 2m+1 & L_2+2L_1 \\ & & (1-m^2)y & + & (2-2m)z & = & -(m-1)^2 & L_3-mL_1 \end{array}\right.$$

On remarque si $m \neq 1$, on peut diviser la dernière ligne par $1-m$ et on obtient

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & + & my & + & 2z & = & m \\ & & (1+2m)y & + & (m+2)z & = & 2m+1 \\ & & (1+m)y & + & 2z & = & m-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc|c} x & + & my & + & 2z & = & m & L_1 \\ & & \left(\dfrac{-m^2+m}{2}\right)y & & & = & -\frac{m^2}{2}+\frac{3}{2}m+2 & L_2-\frac{m+2}{2}L_3 \\ & & (1+m)y & + & 2z & = & m-1 & L_3 \end{array}\right.$$

On en déduit donc que si $\frac{-m^2+m}{2} \neq 0$ et $m \neq 1$ d'où si $m \notin \{0;1\}$, le système a une unique solution, on détermine y avec la deuxième ligne, puis z avec la troisième et enfin x avec la première.

Si $m = 0$, la deuxième ligne devient $0 = 2$, donc pas de solution.

Pour $m = 1$, on revient avant la division par $1-m$ et on obtient

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ & & 3y & + & 3z & = & 3 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

On remarque que l'on peut fixer librement z, on obtient alors y avec la deuxième ligne, puis x avec la première ligne.

On conclut

$\boxed{\text{Le système a une unique solution, si } m \notin \{0,1\}, \text{ pas de solution si } m = 0, \text{ une infinité de solutions si } m = 1 \text{ avec un degré de liberté sur le choix des solutions.}}$