Devoir Maison 1

A rendre le vendredi 13 septembre

Exercice 1.

1. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ de manière réduite.
2. Pour $0 < k \leq n$, simplifier $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}}$.
3. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$ de manière réduite.
4. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$ de manière réduite. (Indication : $k = k-1+1$.)

Exercice 2.

1. Montrer que
$$\forall t \geq 0, \qquad \begin{aligned} t - \tfrac{t^3}{6} \leq \sin(t) \leq t \\ 1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} \end{aligned}$$
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par
$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) - 1\right)$$
converge vers des limites à préciser.

Exercice 3.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et la suite (u_n) définie par
$$u_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{i}{j}.$$

1. Déterminer une forme réduite de u_n.
2. Déterminer le plus petit entier q strictement positif tel que pour tout n, qu_n est un nombre entier.

Exercice 4. Déterminer le nombre de solution(s) du système en fonction de m. Si le nombre de solutions est infini, on précisera le nombre de degré de liberté de l'espace des solutions.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & my & + & 2z & = & m \\ -2x & + & y & + & (m-2)z & = & 1 \\ mx & + & y & + & 2z & = & 2m-1 \end{array}\right.$$