Flocon mathématique pour Noël

(**La compréhension de l'exercice 2 est une priorité.)**

Exercice 1.

On considère la belote.

Elle se joue avec un jeu de 32 cartes (8 cartes de chaque couleur (Pique, Coeur, Carreau, Trèfle) : 7,8,9,10, Valet, Dame, Roi et As)

Chaque joueurs J_1, J_2, J_3 et J_4 reçoit 8 cartes, l'ordre des cartes dans une main ne compte pas.

On donnera les résultat sous forme de factoriel et de symbole binomiaux :

1. Déterminer le nombre de distribution de mains possibles pour les 4 joueurs.
2. Déterminer le nombre de distribution dans lesquelles, le joueur J_1 a au moins un carré (C'est-à-dire les 4 cartes de même type dans chacune des couleurs).
3. Soient A, B, C, D 4 ensembles finis, exprimer le cardinal de $A \cup B \cup C \cup D$ uniquement avec des cardinaux d'intersection.
4. Déterminer le nombre de distributions dans lesquelles, un joueur au moins parmi les 4 a des coupes franches à coeur et à carreau (c'est à dire aucun coeur et aucun carreau dans la main).
5. $\star$ Déterminer le nombre de distributions dans lesquelles, deux joueurs au moins parmi les 4 ont une coupe franche à coeur.

Exercice 2.

On considère le groupe $(\mathbb{R}, +)$ et $(H, +)$ un sous-groupe non réduit à l'élément neutre.

On introduit

$$A = \{x\,;\, x \in H \text{ et } x > 0\}$$

et $\alpha = \inf A$.

1. Justifier que le nombre α est bien défini.
2. Premier cas : $\alpha > 0$
   (a) Objectif : Montrer que $\alpha \in H$.
   Supposons $\alpha \notin H$.
      i. Montrer qu'il existe $x \in H$ tel que que $\alpha < x \leq 2\alpha$, puis $y \in H$ tel que $\alpha < y < x$.
      ii. Conclure.
   (b) Montrer que $\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha k\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous groupe de H.
   (c) Montrer que $H = \alpha\mathbb{Z}$.
   (*Indication : Pour $x \in H$, on pourra considérer $\left\lfloor \frac{x}{\alpha} \right\rfloor$.)*
3. Second cas : $\alpha = 0$
   (a) Montrer qu'il existe (ϵ_n) une suite d'éléments strictement positifs de H de limite nulle.
   (b) Montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.
   (*Indication : Pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque, on pourra considérer $\left\lfloor \frac{x}{\epsilon_n} \right\rfloor$ pour construire une suite adaptée.)*

Exercice 3. [Adapté d'un sujet d'oral CCP PSI 2013]

On pourra admettre la question 2 pour faire la suite.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation

$$nx^3 + n^2 x - 2 = 0$$

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution réelle que l'on notera x_n. On précisera le signe de x_n.
2. On souhaite montrer par l'absurde que la suite (x_n) converge vers 0.
   (a) Enoncer la définition de la convergence vers 0 d'une suite (v_n).
   (b) Prendre la négation de la propriété énoncée à la question précédente.
   (c) Conclure.
3. Comparer quand $n \to +\infty$, les quantités nx_n^3 et $n^2 x_n$.
4. Déterminer un équivalent simple de la suite (x_n).
5. Déterminer un développement asymptotique à 2 termes de la suite (x_n).