Devoir à la maison 4 Corrigé

Exercice 1.

En utilisant les développements limités usuels et les règles opératoires sur les développements limités , on obtient

$$\begin{array}{rcl} f_1(t) & = & 1-2t+\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{8}t^4+\underset{t\to 0}{o}(t^4) \\ f_2(t) & = & 1-2t+\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{8}{3}t^3-4t^4+\underset{t\to 0}{o}(t^4) \\ f_3(t) & = & 1-2t+\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{8}{3}t^3+\underset{t\to 0}{o}(t^4) \\ f_4(t) & = & 1-2t+\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{8}{3}t^3+\underset{t\to 0}{o}(t^4) \end{array}$$

On a

$f_4(t)-f_1(t)=\frac{7}{3}t^3+\underset{t\to 0}{o}(t^3)$

$f_1(t)-f_3(t)=\frac{9}{3}t^3+\underset{t\to 0}{o}(t^3)$

$f_3(t)-f_2(t)=4t^4+\underset{t\to 0}{o}(t^4)$

donc en $t=0^+$, on a $f_2(t)\leq f_3(t)\leq f_1(t)\leq f_4(t)$.

On a

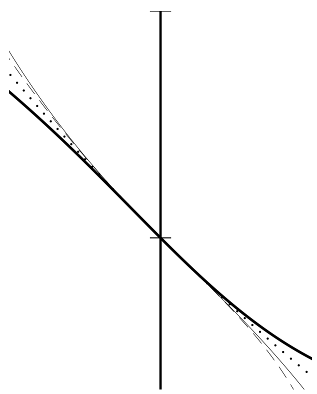
$f_3(t)-f_2(t)=4t^4+\underset{t\to 0}{o}(t^4)$

$f_2(t)-f_1(t)=-\frac{9}{3}t^3+\underset{t\to 0}{o}(t^3)$

$f_1(t)-f_4(t)=-\frac{7}{3}t^3+\underset{t\to 0}{o}(t^3)$

donc, en prenant en compte la parité des puissances, en $t=0^-$, on a $f_4(t)\leq f_1(t)\leq f_2(t)\leq f_3(t)$.

On remarque de plus que toutes les courbes sont au dessus leur tangente en 0.



Exercice 2.

1. On pose $\varphi(x)=ax+b$. On a alors

$$x(x+1)\varphi''(x)+(2x+1)\varphi'(x)-2\varphi(x)=(2x+1)a-2(ax+b)=(a-2b).$$

Si $a-2b=0$, alors $\varphi(x)$ est solution par exemple pour $\varphi(x)=2x+1$.

2. Si $y(x) = z(x)(2x+1)$ avec $z(x)$ fonction deux fois dérivables, on a alors

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & z(x)(2x+1) \\ y'(x) & = & z'(x)(2x+1) + 2z(x) \\ y''(x) & = & z''(x)(2x+1) + 4z'(x). \end{array}$$

Il résulte

$$\begin{aligned} & x(x+1)y''(x) + (2x+1)y'(x) - 2y(x) \\ & \qquad = x(x+1)\left[z''(x)(2x+1) + 4z'(x)\right] + (2x+1)\left[z'(x)(2x+1) + 2z(x)\right] - 2z(x)(2x+1), \end{aligned}$$

soit

$$x(x+1)y''(x) + (2x+1)y'(x) - 2y(x) = x(x+1)(2x+1)z''(x) + (8x^2+8x+1)z'(x).$$

Donc si y est solution, z vérifie bien

$$x(x+1)(2x+1)z''(x) + (8x^2+8x+1)z'(x) = 0. \qquad (E')$$

3. Soit

$$\frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1} \qquad (1)$$

En multipliant par x, on obtient

$$\frac{8x^2+8x+1}{(x+1)(2x+1)} = a + \frac{bx}{x+1} + \frac{cx}{2x+1}$$

en prenant $x = 0$, on obtient alors $a = 1$. En multipliant (1) par $x+1$ et prenant $x = -1$, on obtient $b = 1$. Puis de même en multipliant (1) par $2x+1$ et spécialisant en $x = -\frac{1}{2}$, on obtient $c = 4$.
On a donc

$$\boxed{\frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{2x+1}.}$$

Soit

$$\frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{a'}{x} + \frac{b'}{x+1} + \frac{c'}{2x+1} + \frac{d'}{(2x+1)^2}. \qquad (2)$$

En multipliant par x, on obtient

$$\frac{1}{(x+1)(2x+1)^2} = a' + \frac{b'x}{x+1} + \frac{c'x}{2x+1} + \frac{d'x}{(2x+1)^2}$$

En prenant $x = 0$, on obtient $a' = 1$. En multipliant (2) par $x+1$ et prenant $x = -1$, on obtient $b' = -1$. Puis de même en multipliant (2) par $(2x+1)^2$ et spécialisant en $x = -\frac{1}{2}$, on obtient $d' = -4$. On a donc

$$\frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{c'}{2x+1} - \frac{4}{(2x+1)^2}$$

En spécialisant $x = 1$, on obtient

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{c'}{3} - \frac{4}{3^2},$$

soit $c' = 0$. On a donc

$$\boxed{\frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(2x+1)^2}.}$$

4. Sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $x(x+1)(2x+1) \neq 0$ et grâce à c)

$$\int_1^x \frac{8t^2+8t+1}{t(t+1)(2t+1)}\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{4}{2t+1}\mathrm{d}t = \ln(t) + \ln(t+1) + 2\ln(2t+1) + C.$$

Les solutions de

$$x(x+1)(2x+1)g'(x) + (8x^2+8x+1)g(x) = 0$$

sont donc de la forme

$$y(x) = \lambda e^{-(\ln(x)+\ln(x+1)+2\ln(2x+1))} = \frac{\lambda}{x(x+1)(2x+1)^2}$$

5. Grâce à 4., on a

$$z'(x) = \frac{\lambda}{x(x+1)(2x+1)^2}.$$

En utilisant c), on a

$$z'(x) = \lambda\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(2x+1)^2}\right),$$

soit

$$z(x) = \lambda(\ln(x) - \ln(x+1) + \frac{2}{2x+1}) + \gamma.$$

Les solutions de (E) trouvées par cette méthode sont donc

$$\boxed{y(x) = \lambda\left(\ln\left(\tfrac{x}{x+1}\right) + \tfrac{2}{2x+1}\right)(2x+1) + \gamma(2x+1),\ \lambda, \gamma \in \mathbb{R}.}$$