Devoir à la maison 4

A rendre le lundi 27 novembre

Exercice 1. Comparer les positions au voisinage de 0 des courbes des fonctions définies par :

- $f_1(x) = e^{\frac{x^2}{2}} - 2x$
- $f_2(x) = 1 + \ln(1-2x) + \frac{5}{2}x^2$
- $f_3(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{8}{3}x^3$
- $f_4(x) = 1 - \arctan(2x) + \frac{x^2}{2}$.

On conclura l'exercice par une figure. (Couleurs bienvenues)

Exercice 2.

Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 définie sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$x(x+1)y''(x) + (2x+1)y'(x) - 2y(x) = 0. \qquad (E)$$

1. Trouver une solution sous forme d'une fonction polynomiale φ de degré 1.
2. On cherche les solutions sous la forme $y(x) = z(x)\varphi(x)$ avec z fonction deux fois dérivables, montrer que z vérifie
$$x(x+1)(2x+1)z''(x) + (8x^2+8x+1)z'(x) = 0. \qquad (E')$$
3. Déterminer a, b, c, a', b', c', d', tel que
$$\frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}, \quad \frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{a'}{x} + \frac{b'}{x+1} + \frac{c'}{2x+1} + \frac{d'}{(2x+1)^2}.$$
4. Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$, l'équation
$$x(x+1)(2x+1)g'(x) + (8x^2+8x+1)g(x) = 0.$$
5. Calculer les solutions de (E'), puis en déduire une famille de solutions de (E).