Devoir Maison 3 Correction

A rendre le mardi 7 novembre

Exercice 1.

1. En appliquant la formule du binôme de Newton, on a

$$\left(z+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^{n-j}e^{i\frac{2kj\pi}{n}}.$$

On a donc bien

$$\boxed{S_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^{n-j}e^{i\frac{2kj\pi}{n}}.}$$

2. Par commutativité des sommes finies, on a

$$\begin{aligned}S_n(z) &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^{n-j}e^{i\frac{2kj\pi}{n}}\\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{j}z^{n-j}e^{i\frac{2kj\pi}{n}}\\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^{n-j}\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\frac{2kj\pi}{n}}\end{aligned}$$

On a donc une somme géométrique de raison $e^{i\frac{2j\pi}{n}}$. Pour $e^{i\frac{2j\pi}{n}}\neq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\frac{2kj\pi}{n}}=\frac{1-\left(e^{i\frac{2j\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{2j\pi}{n}}}=\frac{1-e^{i2j\pi}}{1-e^{i\frac{2j\pi}{n}}}=0.$$

Pour $e^{i\frac{2j\pi}{n}}=1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\frac{2kj\pi}{n}}=n.$$

En traçant un cercle trigonométrique, on voit que pour $j\in[\![0,n]\!]$, $e^{i\frac{2j\pi}{n}}=1$, si et seulement si $j=0$ ou $j=n$. On en déduit que

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^{n-j}\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\frac{2kj\pi}{n}}=\binom{n}{0}nz^n+\binom{n}{n}nz^n.$$

On a donc bien $\boxed{S_n(z)=n(1+z^n).}$

3. En évaluant $S_n(e^{2ia})$, on obtient l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{2ia}+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n=n(1+e^{2ina}).$$

En appliquant la factorisation par l'angle moitié, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i(a+\frac{k\pi}{n})}\left(e^{i(a-\frac{k\pi}{n})}+e^{i(-a+\frac{k\pi}{n})}\right)\right)^n=ne^{ina}(e^{-ina}+e^{ina}).$$

Soit

$$\sum_{k=0}^{n-1}e^{i(na+k\pi)}\left(2\cos(-a+\frac{k\pi}{n})\right)^n=2ne^{ina}\cos(na).$$

D'où
$$e^{ina}2^n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n(-a+\frac{k\pi}{n}) = 2ne^{ina}\cos(na).$$
On conclut
$$\boxed{f(a)=\tfrac{n\cos(na)}{2^{n-1}}.}$$

4. Grâce à la question précédente, on a
$$f(a)=0 \Longleftrightarrow \cos(na)=0.$$
Donc a est solution si et seulement $na\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$, donc $a\equiv\frac{\pi}{2n}[\frac{\pi}{n}]$. On conclut que a est solution de $f(a)=0$, si et seulement si $\boxed{a\in\left\{\pi 2n+k\frac{\pi}{n};k\in\mathbb{Z}\right\}.}$

5. Grâce à la question 4, en substituant $a+\frac{\pi}{2}$ à a, on a
$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n\left(\frac{k\pi}{n}-a-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{n\cos(n(a+\frac{\pi}{2}))}{2^{n-1}}.$$
Comme $\cos(x-\frac{\pi}{2})=\sin(x)$ on en déduit
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\sin^n\left(\frac{k\pi}{n}-a\right)=\frac{n\cos(n(a+\frac{\pi}{2}))}{2^{n-1}}.}$$

Exercice 2. $\star$

Certaines implications de cet exercice sont difficiles sur le plan rigueur logique.

1. Numérotons les propriétés :
   (i) f injective
   (ii) f_* injective
   (iii) f^* surjective

$\boxed{(i)\Longrightarrow(ii)}$ Supposons f injective.
Soient $h_1,h_2\in E^G$, tel que $f_*(h_1)=f_*(h_2)$, montrons que $h_1=h_2$.
On a donc pour tout $x\in G$, $(f_*(h_1))(x)=(f_*(h_2))(x)$.
Il en résulte donc que pour tout $x\in G$, $f(h_1(x))=f(h_2(x))$.
Or f est injective, donc tout $x\in G$, $h_1(x)=h_2(x)$.
On en déduit que $h_1=h_2$, donc f_* est injective.
$\boxed{(ii)\Longrightarrow(i)}$ Supposons f_* injective.
Soient $x_1,x_2\in E$, tel que $f(x_1)=f(x_2)$, montrons que $x_1=x_2$.
On peut considérer les applications h_1,h_2 de E^G définies pour tout $x\in G$ par $h_1(x)=x_1$ et $h_2(x)=x_2$.
On a alors pour tout $x\in G$,
$$(f_*(h_1))(x)=f(h_1(x))=f(x_1)=f(x_2)=f(h_2(x))=(f_*(h_2))(x)$$
On déduit que $f_*(h_1)=f_*(h_2)$.
Or f_* est injective donc $h_1=h_2$, pour tout $x\in E$, $x_1=h_1(x)=h_2(x)=x_2$.
On a donc $x_1=x_2$, donc f injective.
$\boxed{(i)\Longrightarrow(iii)}$ Supposons f injective.
Montrons que f^* est surjective.
Pour cela, on fixe une élément g de G^E, il faut montrer qu'il existe un antécédent par f^*.
On le construit. On cherche $h\in G^F$, tel que $g=h\circ f$. Fixons $y_0\in G$. On peut définir l'application h de F dans G par

$$h(x) = \begin{cases} g(f(x_0)) & \text{si } x \in f(E) \text{ et alors } x_0 \text{ est défini de manière unique car } f \text{ injective.} \\ y_0 & \text{si } x \notin f(E). \end{cases}$$

On vérifie que $h \circ f = g$ par construction.

$\boxed{(iii) \Longrightarrow (i)}$

Par contraposée, supposons f non injective. Donc il existe $x_1, x_2 \in E$ avec $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$.
On aura donc pour tout $h \in G^F$, $(f^*(h))(x_1) = h(f(x_1)) = h(f(x_2)) = (f^*(h))(x_2)$.
Donc toutes les applications de $f^*(G^F)$ ont même image en x_1 et x_2.
Comme G contient 2 éléments, une application de G^E peut avoir une image différente pour x_1 et x_2 donc f^* n'est pas surjective.

$$\boxed{\text{On a bien équivalence entre les 3 propriétés.}}$$

2. Numérotons les propriétés :

   (i') f surjective

   (ii') f_* surjective

   (iii') f^* injective.

   $\boxed{(i') \Longrightarrow (ii')}$ Supposons f surjective.

   Montrons que f_* est surjective.

   Pour cela, on fixe une élément u de F^G, il faut montrer qu'il existe un antécédent par f_*.

   Comme pour $x_0 \in G$, on a $u(x_0) \in F$ et que f surjective existe $x_1 \in E$ tel que $f(x_1) = u(x_0)$ on peut donc poser $h(x_0) = x_1$ et on aura bien $f(h(x_0)) = u(x_1)$. Par l'axiome du choix, on peut le faire simultanément pour tous les éléments de G, on peut donc construire un antécédent de u par f_* donc f_* est surjective.

   $\boxed{(ii') \Longrightarrow (i')}$ Supposons f_* surjective.

   Montrons que f est surjective.

   Soit $y_0 \in F$, comme f_* est surjective, l'application $x \mapsto y_0$ de F^G admet un antécédent h_0 par f_*.

   On a alors pour tout élément de x_1 de G, $f \circ h_0(x_1) = f(h_0(x_1)) = (x \mapsto y_0)(x_1) = y_0$.

   L'élément $h_0(x_1)$ est donc un antécédent de y_0 par f, donc f surjective.

   $\boxed{(i') \Longrightarrow (iii')}$ Supposons f surjective.

   Montrons que f^* est injective.

   Soit $h_1, h_2 \in G^F$ tel que $f^*(h_1) = h_1 \circ f = h_2 \circ f = f^*(h_2)$.

   Montrons que $h_1 = h_2$. Soit $x_0 \in F$, comme f surjective, il existe $x_1 \in E$ tel que $f(x_1) = x_0$. On a donc

   $$h_1(x_0) = h_1(f(x_1)) = f^*(h_1)(x_1) = f^*(h_2)(x_1) = h_2(f(x_1)) = h_2(x_0).$$

   Vrai pour tout $x_0 \in F$, donc $h_1 = h_2$. On conclut f^* injective.

   $\boxed{(iii') \Longrightarrow (i')}$ Par contraposée, supposons f non surjective.

   Donc il existe $x_0 \in F$ tel que $x_0 \notin f(E)$. Comme G contient au moins deux éléments distincts y_1 et y_2. On construit 2 applications de $h1$ et h_2 de G^F par

   Pour $x \in F$, $h_1(x) = y_1$ et $h_2(x) = \begin{cases} y_1 \text{ si } x \neq x_0 \\ y_2 \text{ si } x = x_0 \end{cases}$

   On a par hypothèse sur pour tout $x \in E$, $f(x) \neq x_0$, donc $h_1(f(x)) = y_1 = h_2(f(x))$, d'où $f^*(h1) = f^*(h_2)$. L'application f^* est donc non injective.

$$\boxed{\text{On a bien équivalence entre les 3 propriétés.}}$$

Intégrales de Wallis

1. On a

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = 1, \qquad I_2 = \frac{\pi}{4}}$$

2. Utilisons l'indication :

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) - \cos^{n+2}(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(x))\cos^n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^n(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Par l'intégration par parties suivante (les fonctions considérées sont bien continues et de dérivées continues)

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) & u'(x) = \cos(x) \\ v'(x) = \sin(x)\cos^n(t) & v(x) = -\frac{1}{n+1}\cos(x)^{n+1}, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+2} &= \left[\sin(x)\left(-\frac{1}{n+1}\right)\cos(x)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1} I_{n+2}. \end{aligned}$$

Soit

$$I_n = \frac{n+2}{n+1} I_{n+2},$$

on a donc bien

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.}$$

3. En multipliant l'égalité précédente par $(n+2)I_{n+1}$, on obtient

$$(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n.$$

Par une récurrence immédiate,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+1)I_{n+1}I_n = I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}.}$$

4. Prouvons les 2 propriétés par récurrence.
Pour la première, on a

$$\frac{\pi}{2} = I_0 = I_{2\cdot 0} = \frac{(2\cdot 0)!}{2^{2\cdot 0}(0!)^2}\frac{\pi}{2}. \text{ Rappel, on a } 0! = 1.$$

L'initialisation est donc vérifiée pour $p = 0$.
Pour l'hérédité, supposons que la propriété est vérifiée au rang $p \geq 0$:

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

On a alors au rang $p+1$, grâce à la relation trouvée à la question 2.

$$I_{2(p+1)} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit

$$I_{2(p+1)} = \frac{2p+1}{2p+2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{2p+2}{2\cdot(p+1)}\frac{2p+1}{2(p+1)}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2},$$

soit

$$I_{2(p+1)} = \frac{(2(p+1))!}{2^{2p+2}((p+1)!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

La propriété est vérifiée au rang $p+1$, donc pour tout rang $p \geq 0$.
On conclut donc

$$\boxed{\forall p \geq 0, \qquad I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}.}$$

Pour la seconde, on a

$$1 = I_1 = I_{2\cdot 0+1} = \frac{2^{2\cdot 0}(0!)^2}{(2\cdot 0+1)!}.$$

L'initialisation est donc vérifiée pour $p = 0$.
Pour l'hérédité, supposons que la propriété est vérifiée au rang $p \geq 0$:

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

On a alors au rang $p+1$, grâce à la relation trouvée à la question 2.

$$I_{2(p+1)+1} = \frac{2p+2}{2p+3}I_{2p}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit

$$I_{2(p+1)+1} = \frac{2p+2}{2p+3}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2(p+1)}{2p+2}\frac{2(p+1)}{2p+3}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!},$$

soit

$$I_{2(p+1)+1} = \frac{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}{(2(p+1)+1)!}.$$

La propriété est vérifiée au rang $p+1$, donc pour tout rang $p \geq 0$.
On conclut donc

$$\boxed{\forall p \geq 0, \qquad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.}$$

5. Comme $0 \leq \cos(x) \leq 1$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$0 \leq \cos(x)^{n+2} \leq \cos^{n+1}(x) \leq \cos^n(x).$$

En intégrant sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^{n+2}\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x.$$

Soit

$$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n,$$

D'où grâce à la question 2,

$$\frac{n+1}{n+2}I_n \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

Comme $I_n \geq 0$,

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, par encadrement, on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.}$

6. On a $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, grâce à la question 3, d'où en utilisant la question 5.

$$nI_n^2 = nI_nI_{n-1}\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{\pi}{2}\frac{I_n}{I_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2},$$

soit comme $I_n \geq 0$, par passage à la racine,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

7. En utilisant la question 5, on a

$$\lim_{p\to+\infty} \sqrt{2p+1}I_{2p+1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Donc

$$\lim_{p\to+\infty} (2p+1)I_{2p+1}^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Soit grâce à la question 3,

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} 2p\left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.}$$