Devoir Maison 3

A rendre le mardi 7 novembre

Exercice 1. Pour un entier $n \geq 2$, $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$, on considère

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n$$

et

$$f(a) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{k\pi}{n} - a\right).$$

1. Montrer que
$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^{n-j} e^{i\frac{2kj\pi}{n}}.$$

2. Montrer que
$$S_n(z) = n(1 + z^n).$$

3. En évaluant en $z = e^{2ia}$, montrer que
$$f(a) = \frac{n\cos(na)}{2^{n-1}}\cdot$$

4. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a, $f(a) = 0$.
5. Ecrire sous forme réduite
$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sin^n\left(\frac{k\pi}{n} - a\right).$$

Exercice 2. $\star$

Certaines implications de cet exercice sont difficiles sur le plan rigueur logique.

Soient E, F, G trois ensembles non vides et G ayant au moins 2 éléments, on fixe f une application de E dans F et on définit 2 nouvelles applications :

$$f_* : \begin{array}{ccc} E^G & \longrightarrow & F^G \\ h & \longmapsto & f \circ h \end{array} \quad \text{et} \quad f^* : \begin{array}{ccc} G^F & \longrightarrow & G^E \\ h & \longmapsto & h \circ f \end{array}$$

1. Montrer que
$$f \text{ injective} \iff f_* \text{ injective} \iff f^* \text{ surjective.}$$

2. Montrer que
$$f \text{ surjective} \iff f_* \text{ surjective} \iff f^* \text{ injective.}$$

Intégrales de Wallis

Pour un entier $n \geq 0$, on définit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Montrer que $\forall n \geq 0, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. (On pourra regarder la quantité $I_n - I_{n+2}$)
3. Montrer que la quantité $(n+1)I_{n+1}I_n$ est indépendante de n, on déterminera sa valeur.
4. Montrer que
$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$
5. Montrer que la suite (I_n) est monotone et en déduire que
$$\lim_n \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.$$
6. En déduire que
$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
7. Conclure des résultats précédents que
$$\lim_{p \to +\infty} (2p+1)\frac{2^{4p}(p!)^4}{(2p+1)!^2} = \frac{\pi}{2}.$$