Devoir à la maison 2

A rendre le mercredi 4 octobre

Exercice 1.

1. On propose 2 méthodes :
   Première méthode :
   Étudions la fonction f définie par $f(x)=\arctan(x+1)-\arctan(x)-\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ par les règles de compositions usuelles et on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+(1+x)^2}-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)^2}\cdot\left(\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\right)\\
&= \frac{1}{1+(1+x)^2}-\frac{1}{1+x^2}+\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2+1}\\
&= \frac{1}{2+2x+x^2}-\frac{1}{1+x^2}+\frac{2x+1}{x^4+2x^3+4x^2+2x+2} \quad \text{(En développant)}\\
&= \frac{-2x-1}{x^4+2x^3+4x^2+2x+2}+\frac{2x+1}{x^4+2x^3+4x^2+2x+2} \quad \text{(En regroupant)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

   Comme $\mathbb{R}^+$ est un intervalle et que la fonction f est de dérivée nulle, la fonction est donc constante égale à sa valeur en 0, or $f(0)=0$. On a donc

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\quad \arctan(x+1)-\arctan(x)-\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)=0.$$

   Seconde méthode :
   Composons par la tangente chacun des membres, on a

$$\begin{aligned}
\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)\right) &= \frac{1}{x^2+x+1}\\
\tan\left(\arctan(x+1)-\arctan(x)\right) &= \frac{\tan(\arctan(x+1))-\tan(\arctan(x))}{1+\tan(\arctan(x+1))\tan(\arctan(x))}\\
&= \frac{x+1-x}{1+(x+1)x}=\frac{1}{x^2+x+1}
\end{aligned}$$

   On en déduit que

$$\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)-\arctan(x+1)+\arctan(x)\equiv 0\quad[\pi].$$

   Comme arctan est une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on a donc

$$\arctan(x+1)-\arctan(x)\in[0,\pi[,$$

   de plus, on a $x^2+x+1>0$, car aucune racine réelle et coefficient dominant positif, d'où

$$\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)\in[0,\frac{\pi}{2}[.$$

   Il en résulte

$$\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)-\arctan(x+1)+\arctan(x)\in]-\pi;\frac{\pi}{2}[,$$

   d'où seule possibilité $\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)-\arctan(x+1)+\arctan(x)=0.$
   On conclut donc que

$$\boxed{x \in \mathbb{R}^+, \ \arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right).}$$

2. Grâce à la question précédente, on a

$$\begin{aligned} u_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \arctan(k+1) - \arctan(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \arctan(k+1) - \sum_{k=0}^{n} \arctan(k) \\ &= \arctan(n+1) - \arctan(0) = \arctan(n+1) \end{aligned}$$

On conclut

$$\boxed{\lim_n u_n = \frac{\pi}{2}.}$$

Exercice 2.

1. On calcule la dérivée de f et on obtient

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{3}{1+(x+2)^2} = \frac{1+(x+2)^2 - 3 - 3x^2}{(1+x^2)(1+(x+2)^2)} = \frac{-2x^2+4x+2}{(1+x^2)(1+(x+1)^2)}$$

On obtient 2 racines $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$, soit le tableau de variation

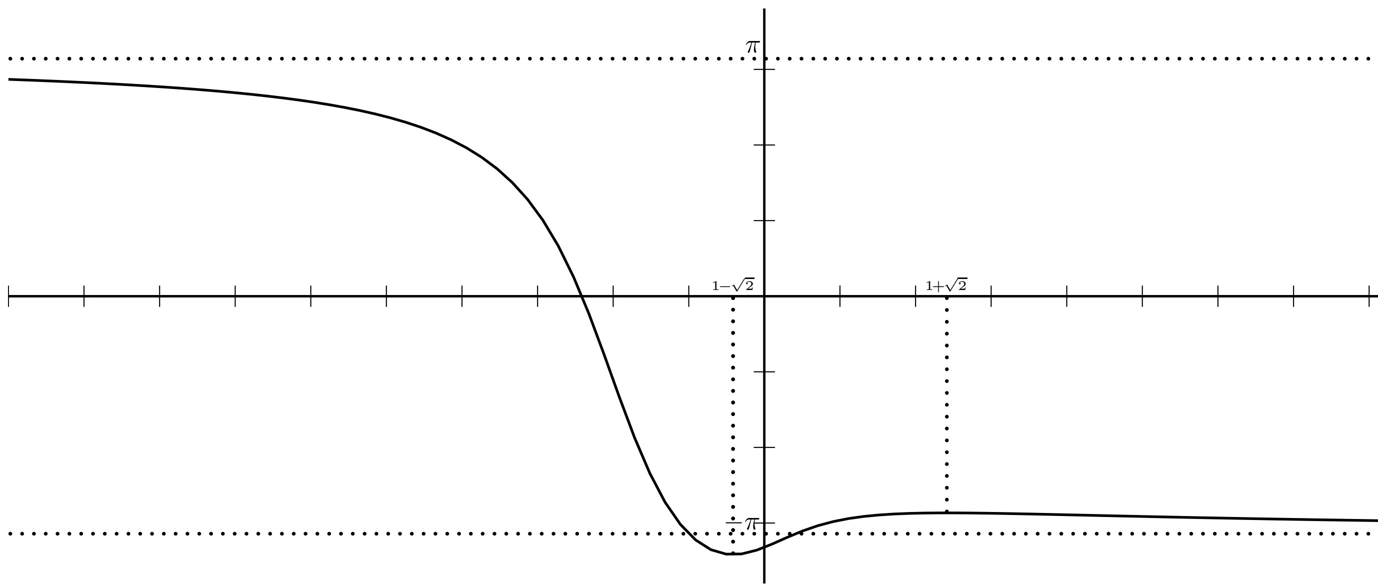
x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	π	$\searrow$	$f(1-\sqrt{2})$	$\nearrow$	$f(1+\sqrt{2})$	$\searrow$	$-\pi$

Les limites ne sont pas indéterminées et on remarque que la courbe de f possède 2 asymptotes horizontales $y = \pi$ en $-\infty$ et $y = -\pi$ en $+\infty$

2. On a $f(0) = -3\arctan(2)$ et $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$. Comme $\sqrt{3} < 2$ par stricte croissance de la fonction arctan, on a $\frac{\pi}{3} = \arctan(\sqrt{3}) < \arctan(2)$, soit $\pi < 3\arctan(2) = -f(0)$ et on conclut

$$\boxed{|f(0)| > \pi.}$$

3. On trace



4. Le formulaire trigonométrique nous donne
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
On en déduit
$$\tan(3x) = \frac{\tan x + \tan(2x)}{1 - \tan x \tan 2x}$$
puis
$$\tan(3x) = \frac{\tan x + 2\frac{\tan x}{1-\tan^2 x}}{1 - 2\frac{\tan^2 x}{1-\tan^2 x}}.$$
On conclut après simplification
$$\boxed{\tan(3x) = \frac{-\tan^3(x)+3\tan x}{1-3\tan^2(x)}.}$$

5. Par lecture du tableau de variation comme $f(1-\sqrt{2}) < f(0) < -\pi$, la continuité de f et stricte monotonie sur chaque intervalle, nous permet d'appliquer le théorème de la bijection, on en déduit que l'équation $f(x) = -\pi$ possède 2 solutions.
Analyse : En composant l'équation $f(x) = -\pi$ par tan, on obtient
$$\tan(\arctan(x) - 3\arctan(2+x)) = 0,$$
or
$$\arctan(x) - 3\arctan(2+x)) = \frac{x - \tan(3\arctan(x+2))}{1 + x\tan(3\arctan(x+2))}.$$
Grâce à la question précédente, on
$$\tan(3\arctan(x+2)) = \frac{-(x+2)^3 + 3(x+2)}{1 - 3(x+2)^2}.$$
En regroupant, on obtient donc
$$\frac{x - \frac{-(x+2)^3+3(x+2)}{1-3(x+2)^2}}{1 + x\frac{-(x+2)^3+3(x+2)}{1-3(x+2)^2}} = 0.$$
En simplifiant, on obtient
$$\frac{2(x^3+3x^2+x-1)}{x^4+6x^3+12x^2+14x+11} = 0.$$
Les racines de $x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$ sont donc des racines potentielles. On remarque que -1 est racine évidente et on a
$$x^3 + 3x^2 + x - 1 = (x+1)(x^2+2x-1).$$
On obtient donc trois racines potentielles : -1, $-1-\sqrt{2}$ et $-1+\sqrt{2}$.
Synthèse :
L'étude de la fonction nous a permis d'obtenir l'existence d'exactement 2 racines, il faut donc en exclure une.
Première méthode : Comme $2 - 1 - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} < 0$, on a $-3\arctan(1-\sqrt{2}) > 0$ et de plus $\arctan(-1-\sqrt{2}) > -\frac{\pi}{2}$, on a donc $f(-1-\sqrt{2}) > -\frac{\pi}{2}$.
Il en résulte que $-1-\sqrt{2}$ n'est pas une solution de $f(x) = -\pi$ et on conclut que
$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = -\pi \text{ a exactement deux solutions } -1 \text{ et } -1+\sqrt{2}.}$$
Deuxième méthode : (Proposée par un élève)
On a $f(-1) = \arctan(-1) - 3\arctan(1) = -4\arctan(1) = -\pi$, donc -1 est solution. Le tableau de variations nous donne l'existence d'une racine positive, une seule possibilité $-1+\sqrt{2}$.
On arrive donc à la même conclusion.

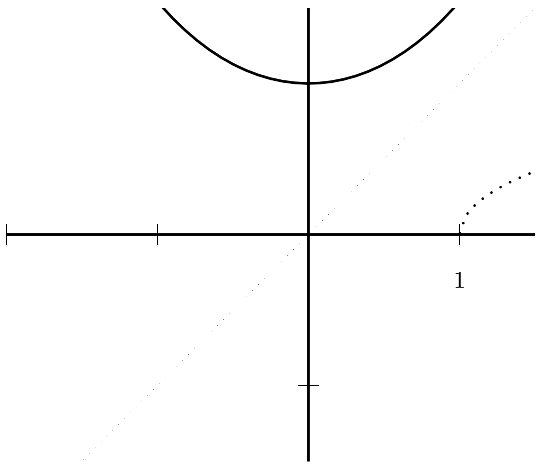
Exercice 3.

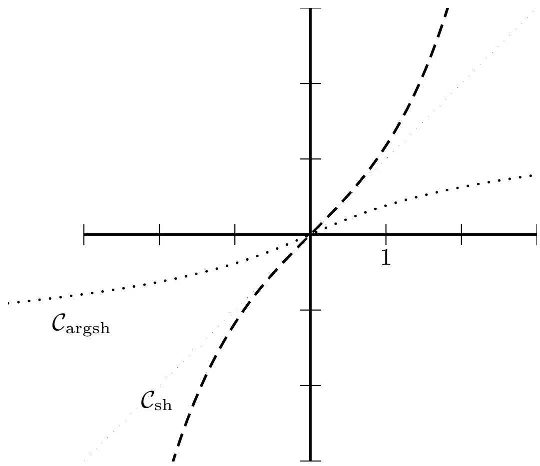
1. Le cours nous donne directement :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{sh}(x)$		$-$	0	$+$	
$\operatorname{ch}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{ch}(x)$		$+$		$+$	
$\operatorname{ch}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On trace alors





2. Le tableau de variations de ch nous directement que la fonction ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction ch est continue. Par le théorème de la bijection (ou le corollaire des valeurs intermédiaires), elle est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\operatorname{ch}(\mathbb{R}^+) = [1, +\infty[$.
   Le tableau de variations de sh nous directement que la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et la fonction sh est continue.. Par le théorème de la bijection (ou le corollaire des valeurs intermédiaires), elle est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\operatorname{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
3. On obtient la courbe de argch en traçant le symétrique de la partie d'abscisse positive de la courbe de ch par rapport à la droite d'équation $y = x$. On obtient la courbe de argsh en traçant le symétrique de la courbe de sh par rapport à la droite d'équation $y = x$.
4. Les définitions de argch et argsh permet d'obtenir, les 2 résultats suivants :
   (i) $\forall x \in [1, +\infty[, \quad \operatorname{ch}(\operatorname{argch}(x)) = x$
   (ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}(\operatorname{argsh}(x)) = x$.
5. Le cours nous donne, pour réel x, $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$. On déduit
$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \operatorname{sh}^2(\operatorname{argch} x) = \operatorname{ch}^2(\operatorname{argch} x) - 1 = x^2 - 1$$
   et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}^2(\operatorname{argsh} x) = 1 + \operatorname{sh}^2(\operatorname{argch} x) = 1 + x^2.$$
   Comme sh est une fonction positive sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction argch est à valeur dans $\mathbb{R}^+$, on en déduit
$$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[, \quad \operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) = \sqrt{x^2 - 1}.}$$
   Comme ch est une fonction positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{1 + x^2}.}$$
6. On rappelle que si f est une fonction bijective et dérivable de I dans J, alors f^{-1} est dérivable au point $y \in J$ si et seulement si $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ et on a alors $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.
   Si on l'applique à $f = \operatorname{ch}$, pour $y \in [1, +\infty[$, on obtient
$$f'(f^{-1}(y)) = \operatorname{sh}(\operatorname{argch}(y)) = \sqrt{y^2 - 1}.$$
   On en déduit que argch est dérivable seulement sur $]1, +\infty[$ et

$$\boxed{\forall y \in]-1, \infty[, \quad \mathrm{argch}\,'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.}$$

Si on l'applique à $f = \mathrm{sh}$, pour $y \in \mathbb{R}$, on obtient

$$f'(f^{-1}(y)) = \mathrm{ch}\,(\mathrm{argsh}\,(y)) = \sqrt{1+y^2}.$$

On en déduit que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall y \in]-1, \infty[, \quad \mathrm{argch}\,'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.}$$

7. On cherche à résoudre

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y.$$

En posant $X = e^x$, on obtient

$$\frac{X + \frac{1}{X}}{2} = y,$$

soit

$$X^2 - 2yX + 1 = 0.$$

On a alors 2 solutions $X = y \pm \sqrt{y^2-1}$.
Comme les variations de ch nous permettent donner l'existence d'exactement 2 solutions (cf. tableau de variations). $\boxed{\text{On a donc 2 solutions à } \mathrm{ch}\,(x) = y : \ln(y \pm \sqrt{y^2-1}).}$ Comme $\mathrm{argch}\,(y)$ est définie comme la plus grande solution, on a

$$\boxed{\forall y \in [1, +\infty[, \quad \mathrm{argch}\,(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1}).}$$

8. On cherche à résoudre

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y.$$

En posant $X = e^x$, on obtient

$$\frac{X - \frac{1}{X}}{2} = y,$$

soit

$$X^2 - 2yX - 1 = 0.$$

On a alors 2 solutions $X = y \pm \sqrt{y^2+1}$.
Comme les variations de sh nous permettent donner l'existence d'exactement une solution (cf. tableau de variations). Il faut don en exclure une, or $y - \sqrt{y^2+1} < 0$ (l'autre solution potentielle est positive et le produit des solutions potentielles est négatif : -1.), on doit donc l'exclure pour passer au logarithme.
$\boxed{\text{On a donc une solution à } \mathrm{sh}\,(x) = y : \ln(y + \sqrt{y^2+1}).}$
On a donc directement

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{argsh}\,(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1}).}$$

9. On calcule proprement et on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\ln(y + \sqrt{y^2-1})\right)' &= \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \\
\left(\ln(y + \sqrt{y^2+1})\right)' &= \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.
\end{aligned}$$