

## Devoir à la maison 2

A rendre le mercredi 4 octobre

**Exercice 1.**

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$  converge vers une limite à préciser.

**Exercice 2.** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \arctan(x) - 3\arctan(2+x).$$

1. Etudier les variations de  $f$ . (On calculera les limites)
2. Justifier que  $|f(0)| > \pi$ .
3. Tracer la courbe de  $f$ .
4. Exprimer  $\tan(3x)$  en fonction de  $\tan(x)$ .
5. Résoudre  $f(x) = -\pi$ .

**Exercice 3.**

1. Donner le tableau de variations et tracer les courbes des fonctions  $\operatorname{ch}$  et  $\operatorname{sh}$ .
2. Justifier que la fonction  $\operatorname{ch}$  définit une bijection de  $\mathbb{R}^+$  dans  $J_1$  et la fonction  $\operatorname{sh}$  définit une bijection de  $I$  dans  $J_2$ , où  $I$ ,  $J_1$  et  $J_2$  sont des parties de  $\mathbb{R}$  à préciser, on choisira  $I$  maximale. On définit leurs fonctions réciproques notées respectivement  $\operatorname{argch}$  et  $\operatorname{argsh}$ .
3. Tracer les courbes de  $\operatorname{argch}$  et  $\operatorname{argsh}$  sur le même graphe que la question 1.
4. Après avoir précisé l'ensemble de définition, simplifier l'expression de la fonction  $x \mapsto \operatorname{sh}(\operatorname{argch} x)$ . Faire de même avec  $x \mapsto \operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)$ . (On pourra calculer le carré des expressions)
5. Exprimer les dérivées de  $\operatorname{argch}$  et  $\operatorname{argsh}$ .
6. Soit  $y \in \mathbb{R}$ , résoudre l'équation  $\operatorname{ch}(x) = y$  et en déduire une expression logarithmique de  $\operatorname{argch}(y)$ .
7. Soit  $y \in \mathbb{R}$ , résoudre l'équation  $\operatorname{sh}(x) = y$  et en déduire une expression logarithmique de  $\operatorname{argsh}(y)$ .
8. Dériver les expressions obtenues en 6. et 7., vérifier la cohérence avec 5.