

Devoir à la maison 1

A rendre le lundi 18 septembre

Exercice 1.

1. Etudions sur \mathbb{R}^+ la fonction g définie par $g(t) = \sin(t) - t$. On a $g'(t) = \cos(t) - 1 \leq 0$, il en résulte donc

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	0	

Il n'est pas nécessaire de faire une étude plus précise, on a directement

$$\forall t \geq 0, \quad \sin(t) - t \leq 0.$$

La première inégalité est donc démontrée.

On a $\forall t \geq 0, \quad \cos(t) \leq 1$. Puis pour $t \geq 0$, en intégrant l'inégalité $\sin(u) \leq u$ sur $[0, t]$, on obtient

$$[-\cos(u)]_0^t \leq \int_0^t u \, du,$$

d'où $\forall t \geq 0, \quad 1 - \cos(t) \leq \frac{t^2}{2}$, soit $\forall t \geq 0, \quad 1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t)$.

On conclut donc

$\forall t \geq 0, \quad \begin{aligned} \sin(t) &\leq t \\ 1 - \frac{t^2}{2} &\leq \cos(t) \leq 1 \end{aligned}$

2. Par encadrement, pour $t > 0$, on a

$$\frac{1}{t} - \frac{t}{2} \leq \cos(t) \leq \frac{1}{t}.$$

Pour $x > 0$, en intégrant sur $[x, 3x]$, on obtient

$$\left[\ln t - \frac{t^2}{4} \right]_x^{3x} \leq g(x) \leq [\ln t]_x^{3x},$$

soit

$$\ln(3x) - \ln(x) - 2x^2 \leq g(x) \leq \ln(3x) - \ln(x).$$

Il en résulte

$$\ln 3 - 2x^2 \leq g(x) \leq \ln 3.$$

Par le théorème des gendarmes, on conclut en passant à la limite dans l'encadrement

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \ln 3.$
--

Exercice 2.

1. En mettant au même dénominateur le membre de droite, on obtient

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+4} = \frac{(a+b+c)k^2 + (5a+4b+c)k + 4a}{k(k+1)(k+4)}.$$

Une condition suffisante est
$$\begin{cases} 4a = 2 \\ 5a + 4b + c = 1 \\ a + b + c = 0. \end{cases}$$

On obtient, en résolvant par exemple par la méthode du pivot, $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = -\frac{1}{6}$.

On conclut que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{k+2}{k(k+1)(k+4)} = \frac{1}{2} \frac{1}{k} - \frac{1}{3} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{6} \frac{1}{k+4}.$$

2. En utilisant le résultat de la question précédente, on a

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \frac{1}{k} - \frac{1}{3} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{6} \frac{1}{k+4} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+4}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, on a

$$U_n = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{6} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+4} \right).$$

En écrivant le décalage d'indice (le faire!), on obtient des sommes télescopiques et

$$U_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right)$$

Puis par passage à la limite $\lim_n U_n = \frac{49}{72}$.

Exercice 3.

Grâce à la formule du binôme de Newton, on a

$$I_n(a) + P_n(a) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} a^k + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} a^k = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} a^k = (1+a)^n$$

et

$$-I_n(a) + P_n(a) = - \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} a^k + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} a^k = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} (-a)^k = (1-a)^n$$

On en déduit que

$$P_n = \frac{(1+a)^n + (1-a)^n}{2} \quad \text{et} \quad I_n = \frac{(1+a)^n - (1-a)^n}{2}.$$

Exercice 4.

1. La définition de (S_n) donne

$$S_n = \sum_0^{n-1} (7 + 10k) = 7 \sum_0^{n-1} 1 + 10 \sum_0^{n-1} k = 7n + 10 \frac{n(n-1)}{2}.$$

On conclut

$$\boxed{S_n = n(5n + 2)}.$$

2. On remarque en effectuant un changement d'indice $k = n - \ell$ et en utilisant les propriétés du cos :

$$\sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{\ell=0}^n \cos\left(\frac{(n-\ell)\pi}{n}\right) = \sum_{\ell=0}^n -\cos\left(\frac{\ell\pi}{n}\right) = -\sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Soit

$$2 \sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0.$$

On conclut

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0}.$$

3. En échangeant les noms d'indices $i \leftrightarrow j$, on a

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{i+j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{j}{j+i}.$$

Comme les sommes sont finies, on peut commuter l'ordre de sommation et on a

$$S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{j}{j+i}.$$

En utilisant les 2 formes, il en résulte

$$S_n + S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{i+j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{j}{j+i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i+j}{j+i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1 = n^2.$$

On conclut

$$\boxed{S_n = \frac{n^2}{2}}.$$

Exercice 5.

On raisonne par équivalence en faisant des opérations élémentaires :

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z = a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z = a - a^2 \\ x + y + z = 1 - a. \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 1 - a \\ ax + (1+a)y + (1+a)z = a - a^2 \\ ax + (1-a)y + (1-a)z = a^2 \end{cases} \begin{array}{l} L_3 \\ L_2 \\ L_1 \end{array} \\ \iff \begin{cases} x + y + z = 1 - a \\ y + z = 0 \\ (1-2a)y + (1-2a)z = 2a^2 - a \end{cases} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - aL_1 \\ L_2 - aL_1 \end{array} \\ \iff \begin{cases} x + y + z = 1 - a \\ y + z = 0 \\ 0 = 2a^2 - a \end{cases} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_2 - (1-2a)L_1 \end{array}$$

Pour que le système admette des solutions, il faut que $2a^2 - a = 0$, soit $a = 0$ ou $a = \frac{1}{2}$. La dernière équation est alors $0 = 0$, il faut donc poser un paramètre par exemple, $z = \lambda$ et on a alors

$$\begin{cases} x = 1 - a \\ y = -\lambda \\ z = \lambda. \end{cases}$$

On conclut

- Si $a \neq 0$ et $a \neq \frac{1}{2}$ l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

- Si $a = 0$, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{(1, -\lambda, \lambda) \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Si $a = \frac{1}{2}$, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\lambda, \lambda \right) \ ; \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$