Lycée du Parc **MP2I 861**

2023-2024

Devoir à la maison 1

A rendre le lundi 18 septembre

Exercice 1.

1. Etudions sur $\mathbb{R}^+$ la fonction g définie par $g(t) = \sin(t) - t$. On a $g'(t) = \cos(t) - 1 \leq 0$, il en résulte donc

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	0 $\searrow$	

Il n'est pas nécessaire de faire une étude plus précise, on a directement

$$\forall t \geq 0, \quad \sin(t) - t \leq 0.$$

La première inégalité est donc démontrée.
On a $\forall t \geq 0, \quad \cos(t) \leq 1$. Puis pour $t \geq 0$, en intégrant l'inégalité $\sin(u) \leq u$ sur $[0, t]$, on obtient

$$[-\cos(u)]_0^t \leq \int_0^t u \mathrm{d}u,$$

d'où $\forall t \geq 0, \quad 1 - \cos(t) \leq \frac{t^2}{2}$, soit $\forall t \geq 0, \quad 1 - \dfrac{t^2}{2} \leq \cos(t)$.
On conclut donc

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall t \geq 0, & \sin(t) \leq t \\ & 1 - \dfrac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1 \end{array}}$$

2. Par encadrement, pour $t > 0$, on a

$$\frac{1}{t} - \frac{t}{2} \leq \cos(t) \leq \frac{1}{t}.$$

Pour $x > 0$, en intégrant sur $[x, 3x]$, on obtient

$$\left[\ln t - \frac{t^2}{4}\right]_x^{3x} \leq g(x) \leq [\ln t]_x^{3x},$$

soit

$$\ln(3x) - \ln(x) - 2x^2 \leq g(x) \leq \ln(3x) - \ln(x).$$

Il en résulte

$$\ln 3 - 2x^2 \leq g(x) \leq \ln 3.$$

Par le théorème des gendarmes, on conclut en passant à la limite dans l'encadrement

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} g(x) = \ln 3.}$$

Exercice 2.

1. En mettant au même dénominateur le membre de droite, on obtient

$$\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+4}=\frac{(a+b+c)k^2+(5a+4b+c)k+4a}{k(k+1)(k+4)}\cdot$$

Une condition suffisante est $\begin{cases} 4a=2 \\ 5a+4b+c=1 \\ a+b+c=0. \end{cases}$

On obtient, en résolvant par exemple par la méthode du pivot, $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{3}$, $c=-\frac{1}{6}$.
On conclut que

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad \frac{k+2}{k(k+1)(k+4)}=\frac{\frac{1}{2}}{k}-\frac{\frac{1}{3}}{k+1}-\frac{\frac{1}{6}}{k+4}\cdot}$$

2. En utilisant le résultat de la question précédente, on a

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{2}}{k}-\frac{\frac{1}{3}}{k+1}-\frac{\frac{1}{6}}{k+4} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+4}\cdot \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, on a

$$U_n=\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+4}\right)\cdot$$

En écrivant le décalage d'indice (le faire !), on obtient des sommes télescopiques et

$$\boxed{U_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)}$$

Puis par passage à la limite $\boxed{\lim_n U_n=\frac{49}{72}.}$

Exercice 3.

Grâce à la formule du binôme de Newton, on a

$$I_n(a)+P_n(a)=\sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ impair}}}\binom{n}{k}a^k+\sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k}a^k=\sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}a^k=(1+a)^n$$

et

$$-I_n(a)+P_n(a)=-\sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ impair}}}\binom{n}{k}a^k+\sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k}a^k=\sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}(-a)^k=(1-a)^n$$

On en déduit que

$$\boxed{P_n=\frac{(1+a)^n+(1-a)^n}{2}\quad \text{et}\quad I_n=\frac{(1+a)^n-(1-a)^n}{2}.}$$

Exercice 4.

1. La définition de (S_n) donne
$$S_n = \sum_0^{n-1}(7+10k) = 7\sum_0^{n-1} 1 + 10\sum_0^{n-1} k = 7n + 10\frac{n(n-1)}{2}.$$
On conclut
$$\boxed{S_n = n(5n+2).}$$

2. On remarque en effectuant un changement d'indice $k = n-\ell$ et en utilisant les propriétés du cos :
$$\sum_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{\ell=0}^{n}\cos\left(\frac{(n-\ell)\pi}{n}\right) = \sum_{\ell=0}^{n} -\cos\left(\frac{\ell\pi}{n}\right) = -\sum_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$
Soit
$$2\sum_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0.$$
On conclut
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0.}$$

3. En échangeant les noms d'indices $i \leftrightarrow j$, on a
$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{i+j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{j}{j+i}.$$
Comme les sommes sont finies, on peut commuter l'ordre de sommation et on a
$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{j+i}.$$
En utilisant les 2 formes, il en résulte
$$S_n + S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{i+j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{j+i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{j+i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = n^2.$$
On conclut
$$\boxed{S_n = \tfrac{n^2}{2}.}$$

Exercice 5.

On raisonne par équivalence en faisant des opérations élémentaires :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & (1-a)y & + & (1-a)z & = & a^2 \\ ax & + & (1+a)y & + & (1+a)z & = & a-a^2 \\ x & + & y & + & z & = & 1-a. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl|l} x & + & y & + & z & = & 1-a & L_3 \\ ax & + & (1+a)y & + & (1+a)z & = & a-a^2 & L_2 \\ ax & + & (1-a)y & + & (1-a)z & = & a^2 & L_1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl|c} x & + & y & + & z & = & 1-a & L_1 \\ & & y & + & z & = & 0 & L_2 - aL_1 \\ & & (1-2a)y & + & (1-2a)z & = & 2a^2-a & L_2 - aL_1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl|c} x & + & y & + & z & = & 1-a & L_1 \\ & & y & + & z & = & 0 & L_2 \\ & & & & 0 & = & 2a^2-a & L_2-(1-2a)L_1 \end{array}\right.$$

Pour que le système admette des solutions, il faut que $2a^2 - a = 0$, soit $a = 0$ ou $a = \frac{1}{2}$. La dernière équation est alors $0 = 0$, il faut donc poser un paramètre par exemple, $z = \lambda$ et on a alors

$$\begin{cases} x = 1 - a \\ y = -\lambda \\ z = \lambda. \end{cases}$$

On conclut

- Si $a \neq 0$ et $a \neq \frac{1}{2}$ l'ensemble des solutions est
$$\mathcal{S} = \emptyset.$$
- Si $a = 0$, l'ensemble des solutions est
$$\mathcal{S} = \left\{(1, -\lambda, \lambda) \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$
- Si $a = \frac{1}{2}$, l'ensemble des solutions est
$$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{2}, -\lambda, \lambda\right) \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$