Comparaisons locales de fonctions

Exercice 1.

Calculer les limites au point indiqué, si elles existent

1. $\frac{e^{2x}-e^{x^2+1}}{\sin\left(x\frac{\pi}{2}\right)-1}$ en $x=1$.
2. $e^{-x}\left(\operatorname{ch}\left(\sqrt{x^2-2x}\right)-\operatorname{ch}\left(\sqrt{x^2+2x}\right)\right)$ en $x=+\infty$.
3. $\frac{x^x-1}{\tan(x)\ln(x)}$ en $x=0^+$.
4. $(\tan(x))^{\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}}$ en $x=\frac{\pi}{4}$.
5. Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^{\alpha}(x)-\operatorname{sh}^{\alpha}(x)$ en $x=0^+$.
6. Pour $a,b,c\in\mathbb{R}^{+*}$, $\left(\dfrac{a^x+b^x}{c^x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ en $x=0$.

Exercice 2.

Calculer au point et à l'ordre indiqué les développements limités des fonctions $(f_i)_{i\in[1,10]}$:

$f_1(x)=x\cos(x)-\sin(x)$	$x=0$	4	$f_6(x)=\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$	$x=0$	3
$f_2(x)=\frac{x}{\sin(x)}$	$x=0$	4	$f_7(x)=\arctan(1+x)$	$x=0$	3
$f_3(x)=e^{\cos(x)}$	$x=0$	4	$f_8(x)=\sin(x)^{\sin x}$	$x=\frac{\pi}{2}$	4
$f_4(x)=\sqrt{1+\sqrt{1-x}}$	$x=0$	3	$f_9(x)=\left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$	$x=0$	3
$f_5(x)=\ln(a^x+b^x)$	$x=0$	2	$f_{10}(x)=\ln\left(x\tan\dfrac{1}{x}\right)$	$x=\infty$	4

Exercice 3. Déterminer si les fonctions données par les expressions suivantes admettent des tangentes au voisinage du point indiqué et si c'est le cas, donner l'équation et la position, en cas de réponse négative donner un équivalent simple :

1. $f_1(x)=\frac{\operatorname{sh}(x)-x}{\tan(x)-x}$ en $x=0$.
2. $f_2(x)=\frac{\operatorname{sh}(x)-x}{e^{\cos(x)}-e^{\operatorname{ch}(x)}}$ en $x=0$.
3. $f_3(x)=\frac{\ln(\tan(x))}{\cos(x)-\sin(x)}$ en $x=\frac{\pi}{4}$.
4. $f_4(x)=\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x-x^2)}$ en $x=0$.

Exercice 4.

Déterminer a et b pour que la fonction f soit d'ordre maximal en $x=0$, on donnera alors un équivalent de f :

$$f(x)=\frac{1+ax^2}{1+bx^2}-\cos(x).$$

Exercice 5.

Développer de deux manières $(1-e^x)^n$ en 0 à l'ordre $n+2$.

En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^p$ pour $p=0,1,\ldots,n+2$.

Exercice 6.

Déterminer si les courbes des fonctions définies par les expressions suivantes admettent des droites asymptotes en $x=+\infty$. En cas de réponse positive, donner une équation et sa position. En cas de réponse négative donner un équivalent le plus simple et la position par rapport à la courbe de celui-ci.

$f_1(x)=\frac{2x^2+x+1}{x}e^{\frac{1}{x}}$	$f_2(x)=x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$f_3(x)=\sqrt{x^4+x^3+1}\,\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$
$f_4(x)=x^2\cos\left(\frac{\pi x}{2x+2}\right)$	$f_5(x)=\arctan\left(\frac{x+1}{x}\right)x$	$f_6(x)=e^{-x}\left(\operatorname{sh}x\right)\sqrt{x^2+x+1}$

Correction

Exercice 1 :

$f_1(x) = -\frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$	$f_6(x) = \frac{1}{16}x^2 - \frac{5}{96}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$
$f_2(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$	$f_7(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$
$f_3(x) = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$	$f_8(x) = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{7h^4}{24} + \underset{h\to 0}{o}\left(h^4\right)$, où $h = x - \frac{\pi}{2}$.
$f_4(x) = \sqrt{2}\left(1 - \dfrac{1}{8}x - \dfrac{5}{128}x^2 - \dfrac{21}{1024}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$	$f_9(x) = e^{\frac{1}{3}}(1 + \frac{7}{90}x^2) + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$
$f_5(x) = \ln(2) + \ln(\sqrt{ab})x + \frac{1}{8}\left(\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)\right)^2 x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$	$f_{10}(x) = \frac{1}{3x^2} + \frac{7}{90x^4} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$

Exercice 2 :

$$f_1(x) = -\frac{1}{2} - \frac{7}{40}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2), \quad f_2(x) = -\frac{1}{6e}x - \frac{1}{120e}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

$$f_3(x) = -\sqrt{2} - \frac{5}{6}\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right), \quad f_4(x) = 2 + 5x + \frac{37}{6}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

Exercice 3 :

$$a = -\frac{5}{12}, \quad b = \frac{1}{12}, \qquad f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^6}{480}.$$

Exercice 5 :

$$\begin{array}{l|l} f_1(x) = 2x + 3 + \frac{3}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}(x^{-1}) & f_2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2 \\ f_3(x) = -x + 1 - \frac{35}{24x} + \underset{x\to+\infty}{o}(x^{-1}) & f_4(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{48}}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}(x^{-1}) \\ f_5(x) = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{4x} + \underset{x\to+\infty}{o}(x^{-1}) & f_6(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{16x} + \underset{x\to+\infty}{o}(x^{-1}) \end{array}$$