Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1.

1. Montrer que $\mathbb{K}_2[X] = \text{Vect}\big((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2\big)$.
2. Montrer que $\mathbb{K}^3 = \text{Vect}\big((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\big)$.
3. Montrer que $\text{Vect}\big((1,3,5), (2,5,-2)\big) = \text{Vect}\big((3,8,3), (-1,-2,7)\big)$.

Exercice 2.

Donner une base des deux sous-espaces vectoriels suivants :

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x+2y+z=0 \ \text{ et } \ 2x+y+3z=0\}$
2. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x+y=0 \ \text{ et } \ 2x-z+t=0\}$

Exercice 3.

Déterminer $\text{Ker}\, f$ et $\text{Im}\, f$ ainsi qu'une base de chacun où

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \to & (2x-y+z+5t, -x+2y+3z-4t, x+5z+6t) \end{array}$$

Exercice 4.

Soient $f_1, f_2, f_3, f_4 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ par

$$f_1 : x \to \cos x \qquad f_2 : x \to x\cos x \qquad f_3 : x \to \sin x \qquad f_4 : x \to x \sin x$$

Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une famille libre.

Exercice 5.

Soient le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les familles $\mathcal{F}_1 = (x \mapsto \cos(ix))_{i \in [\![0,n]\!]}$ et $\mathcal{F}_2 = \big(x \mapsto \cos^i(x)\big)_{i \in [\![0,n]\!]}$.

1. Montrer que les familles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont libres.
2. Comparer $\text{Vect}\mathcal{F}_1$ et $\text{Vect}\mathcal{F}_2$.

Exercice 6. Soient les fonctions f_a définies sur $\mathbb{R}$ pour $a \in \mathbb{R}$ par $f_a(x) = |x-a|$.

Montrer que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre. *(Une famille infinie est libre, si toute sous-famille finie est libre.)*

Exercice 7. Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_{P,Q}(x) = P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x)$. Soit $E_n = \Big\{ f_{P,Q} \, ; \, (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2 \Big\}$

1. Montrer que E_n est un espace vectoriel.
2. Montrer que E_n est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Exercice 8.

1. Montrer que $\big((-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur $(8,4,2)$ dans cette base.
2. Montrer que $\big((X-1)^2, X^2, (X+1)^2\big)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$ et déterminer les coordonnées de X^2+X+1 dans cette base.

Exercice 9.

Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

1. $\mathrm{Vect}\big((1,2,1,0),(4,-2,1,1),(7,2,4,2),(11,4,1,3)\big)$
2. $\mathrm{Vect}\big((2,-1,-3),(-4,1,3),(-6,3,9),(7,2,1)\big)$
3. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ 3x+2y-z=0\}$
4. $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ ;\ x+y-2z+2t=0\ \text{ et }\ x=y\}$.
5. $\{P\in\mathbb{K}_4[X]\ ;\ P(0)=P(1)=P(2)=P(3)\}$

Exercice 10.

1. Montrer que la famille $(X^3+X+1, X^3-2X+2, X^2+3X)$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_5[X]$.
2. Montrer que la famille $\big((8,4,1,-2),(1,3,0,5)\big)$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 11.

Montrer que l'application $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}\times\mathbb{K}[X]\\ P & \to & (P(0),P')\end{array}\right.$ est un isomorphisme. En déduire que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 12.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F+\dim G>\dim E$. Montrer que F et G ont au moins un vecteur non nul en commun.

Exercice 13.

Déterminer le rang des applications suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ccc}G:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x,y) & \to & (x+y,x-y,x+2y)\end{array}\right. \quad\text{et}\quad \left\{\begin{array}{ccc}g:\mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}_4[X]\\ P & \to & X(P'-P'(0))\end{array}\right.$$

Exercice 14.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $(f,g)\in \mathrm{L}(E,F)^2$.

1. Montrer que : $|\mathrm{rg}\,(f)-\mathrm{rg}\,(g)|\leq \mathrm{rg}\,(f+g)\leq \mathrm{rg}\,(f)+\mathrm{rg}\,(g)$.
2. On suppose que $E=F$, que $f\circ g=0_{\mathcal{L}(E)}$ et $(f+g)\in \mathrm{GL}(E)$. Montrer que : $\mathrm{rg}\,(f+g)=\mathrm{rg}\,(f)+\mathrm{rg}\,(g)$.

Exercice 15.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u\in \mathrm{L}(E)$. Montrer l'équivalence :

$$\mathrm{Ker}\,u=\mathrm{Im}\,u \iff u^2=0 \text{ et } \dim E=2\mathrm{rg}\,(u).$$

Exercice 16. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E,

1. Montrer qu'il y a équivalence entre
   (a) $\mathrm{Ker}\,f^2\subset \mathrm{Ker}\,f$
   (b) $\mathrm{Im}\,f\subset \mathrm{Im}\,f^2$
   (c) $E=\mathrm{Im}\,f+\mathrm{Ker}\,f$
   (d) $\mathrm{Ker}\,f\cap \mathrm{Im}\,f=\{0_E\}$
2. Montrer que, sans l'hypothèse de dimension finie, seulement certaines implications sont vraies. Préciser lesquelles.

Exercice 17.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longrightarrow & (P(0), P'(0), P''(0), \dots, P^{(n)}(0)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Exercice 18.

Soient $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{K}$ et $H = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \ ; \ P(\alpha) = 0\}$. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$ et en déterminer une base.

Exercice 19.

Déterminer toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

1. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 3u_n$.
2. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.
3. $u_0 = -3, u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 12u_{n+1} - 9u_n$.
4. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^6}{u_n^5}$.