Groupe symétrique, déterminants et systèmes linéaires

Exercice 1. Calculer la décomposition en cycle à support disjoints, l'ordre et la signature des permutations suivantes :

- $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 7 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
- $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 5 & 2 & 7 & 4 & 9 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Exercice 2. [A_n est engendré par les 3-cycles]

1. Calculer $(a, b, c)(b, c, d)$.
2. Montrer que le sous-groupe alterné A_n est engendré par les 3-cycles pour $n \geq 3$.

Exercice 3. [Calcul de signature]

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2\cdots & 2n & \\ 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{pmatrix}$.

Calculer la signature de σ.

Exercice 4.

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(S_n, \circ)$ dans $(\mathbb{U}_2, \times)$.

Exercice 5.

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(S_{40}, \circ)$ dans $(\mathbb{Z}/2021\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 6. Soit $\sigma \in S_n$. On note c le nombre de cycles dans sa décomposition dans décomposition en cycle à supports disjoints et f son nombre de points fixes.

Déterminer la signature de σ en fonction de n, c et f.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel, f une forme linéaire sur E et p, q 2 projecteurs de E. Montrer que l'application φ définie de E^2 dans $\mathbb{K}$ par

$$\varphi(x, y) = f(p(x))f(q(y)) - f(p(y))f(q(x))$$

est une forme bilinéaire alternée.

Exercice 8.

Soit $m \in \mathbb{C}$ et M la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 2 \\ -1 & m+1 & 3 \\ 2m & 2 & 1-m \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de M.
2. A quelle condition sur m la matrice M est-elle inversible ?

Exercice 9.

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. Exprimer les déterminants suivants sous la forme la plus factorisée possible :

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$ 2) $\star$ $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix}$

$$4)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix} \qquad 5)\ \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 10.

Soit $x \in \mathbb{K}$. Calculer les déterminants suivants qui sont de taille $n \times n$, $n \in \mathbb{N}$ (on pourra introduire des relations de récurrence) :

$$1)\ \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{vmatrix} \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \qquad 4)\ \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 11. $\star$

1. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}$. On pose $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $\det(J) \neq 0$.
   (b) Calculer MJ et en déduire $\det(M)$.
2. $\star\star$ Généralisation : soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & (\omega^2)^2 & \cdots & (\omega^2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & (\omega^{n-1})^2 & \cdots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$$

   Calculer $\det(M)$. Un tel déterminant s'appelle un déterminant *circulant*.

Exercice 12. $\star$

Soient $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ et $A = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix}$.

1. Caculer ${}^tAA$ puis en déduire $|\det(A)|$.
2. Montrer que la fonction $x \to \det(A)$ est polynomiale unitaire de degré 4.
3. En déduire $\det(A)$.
4. En déduire une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de A. Ce résultat est-il conservé si $(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4$?

Exercice 13.

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire.
   (a) Montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme f de E tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.
   (b) En déduire que si f un endomorphisme de E vérifie $f^3 + f = 0$, f n'est pas bijective.
   (c) Si f est un endomorphisme de E admettant une matrice antisymétrique dans une base $\mathcal{B}$, montrer que f n'est pas un automorphisme.
2. Et si la dimension de E est paire, les propriétés précédentes, sont telles conservées ?
3. Et si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$, les propriétés précédentes, sont telles conservées ?

Exercice 14. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} -10 & -6 & 12 \\ 4 & 7 & -8 \\ -7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. On appelle *valeur propre de f* tout scalaire λ pour lequel $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas injective. Déterminer toutes les valeurs propres de f en calculant un déterminant.
2. Si λ est une valeur propre de f, on appelle *sous-espace propre de f associé à λ* le noyau de $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$. Déterminer les sous-espaces propres de f.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est la plus "simple" possible.

Exercice 15. Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2z & = & 0 \\ \overline{a}x & + & y & + & az & = & 0 \\ \overline{a}^2x & + & \overline{a}y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$ en fonction du paramètre $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 16.

Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$ deux à deux distincts. Résoudre les systèmes suivants :

$$1) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a^2x & + & b^2y & + & c^2z & = & d^2 \end{array} \right. \qquad 2) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a^3x & + & b^3y & + & c^3z & = & d^3 \end{array} \right.$$