Dérivation

Dans la suite, sauf précision contraire, I sera un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ avec des bornes finies ou infinies et la fonction f sera définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1 Fonction dérivée

1.1 Définition

Soit a un nombre réel élément de l'intervalle I, on dit que la fonction f est dérivable en a si la fonction φ_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par $\varphi_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite en a et on appelle dérivée de f en a cette limite notée $f'(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ ou $D(f)(a)$, on a alors

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

On dit que f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en a si la fonction φ_a définie comme précédemment a une limite à droite (respectivement à gauche) et on appelle dérivée à droite (respectivement à gauche) de f en a cette limite notée $f'_d(a)$ ((respectivement $f'_g(a)$), a alors

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{et} \quad f'_g(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Exemple: La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est dérivable à droite et à gauche en 0.

Si la fonction f est dérivable en tout point de I, on lui associe sa fonction dérivée $f' : x \mapsto f'(x)$ définie sur I.

1.2 Propriétés

Proposition 1. *Soit a un élément de I qui n'est pas une borne de I, on a équivalence entre*

(i) La fonction f est dérivable en a.

(ii) La fonction f est dérivable en a à droite et à gauche et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Proposition 2. *Soit a un élément de I, il y a équivalence entre*

(i) La fonction f est dérivable en a.

(ii) La fonction f admet un développement limité d'ordre 1 en a.

et si cela est vérifié, on a alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\epsilon(x),$$

où $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$.

Remarque: Cette équivalence n'est pas généralisable en ordre supérieur, la formule de Taylor-Young donne seulement une implication (i) vers (ii).

Corollaire 1. *Si la fonction f est dérivable en a, elle est continue en a.*

En omettant les domaines de définition qu'il faut vérifier en cas d'application, pour f, g 2 fonctions et λ un nombre réel, cela peut se réduire à ce formulaire :

Fonction	Dérivée
$f + \lambda g$	$f' + \lambda g'$
$f \cdot g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\frac{g}{f}$	$\frac{g' \cdot f - g \cdot f'}{f^2}$

Proposition 3. *Soient f une fonction dérivable de I à valeurs dans l'intervalle J et g une fonction dérivable de J dans $\mathbb{R}$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \cdot g' \circ f$.*

Proposition 4. *Soit f une fonction dérivable et bijective de I dans J telle que la fonction f' ne s'annule pas sur I, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable de J dans I et $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.*

1.3 Dérivées successives

1.3.1 Définitions

On définit récursivement la dérivée n-ème de f sur I notée $f^{(n)}$ si elle existe par $f^{(0)} = f$ et $f^{(n+1)}$ est la dérivée de $f^{(n)}$.

On dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, si elle est n dérivable sur I et la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I. On dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, si pour tout entier n, elle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

1.3.2 Propriétés

Proposition 5. *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction $f + \lambda g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et*

$$(f + \lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)}.$$

Proposition 6 (Formule de Leibniz)**.** *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors la fonction $f \cdot g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

Exemple: Calculer la dérivée n-ème des fonctions f et g définies par $f(x) = (x^2 + 1)e^{2x}$ et $g(x) = x^n \ln(x)$.

Proposition 7. *Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I à valeurs dans l'intervalle J et g une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ de J dans $\mathbb{R}$, alors la fonction $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$.*

Corollaire 2. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ (f ne s'annule pas sur I), alors la fonction $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$.*

Proposition 8. *Soient $n \geq 1$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I telle que f' ne s'annule pas sur I, alors la fonction réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$.*

Remarque: Pour $n = 0$, on sait déjà depuis le chapitre précédent que si la fonction f est continue et bijective sur I, alors sa réciproque est continue.

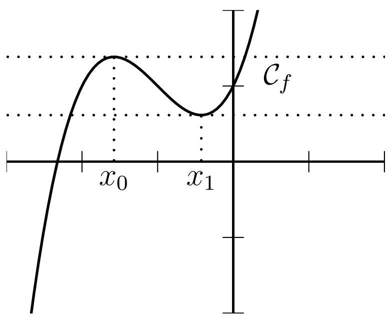
2 Taux d'accroissement

Sauf si c'est préciser dans le texte, les intervalles considérés seront toujours de longueur non nulle, en particulier pour $[a, b]$, on aura $a < b$.

2.1 Théorème de Rolle

Définition 1. *Soit une fonction f définie sur I et a un élément de I, on dit que*

1. *la fonction f admet un maximum local en a, si la propriété $f(x) \leq f(a)$ est vraie au voisinage de a. On peut le quantifier par*
$$\exists \eta > 0, \forall x \in I, \qquad |x - a| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(a).$$
2. *la fonction f admet un minimum local en a, si la propriété $f(x) \geq f(a)$ est vraie au voisinage de a. On peut le quantifier par*
$$\exists \eta > 0, \forall x \in I, \qquad |x - a| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(a).$$
3. *la fonction f admet un extremum local en a, si elle admet un maximum ou un minimum en a.*



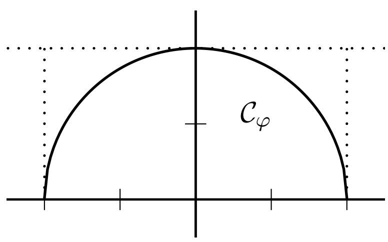
La fonction f admet ici un minimum local en x_1 et un maximum local en x_0, mais ce ne sont pas des extremums globaux.

Lemme 1. *Soient f une fonction dérivable sur $]a, b[$ et $c \in]a, b[$, on suppose qu'elle admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$.*

Remarque: Si on travaille sur le segment $[a, b]$, il faut exclure le cas d'un extremum local en a ou en b.

Corollaire 3 (Théorème de Rolle)**.** *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Remarque : On ne suppose pas la fonction dérivable aux extrémités du segment, mais seulement la dérivabilité sur l'ouvert. Le théorème s'applique par exemple à la fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ continue sur $[-1, 1]$ et dérivable seulement sur $]-1, 1[$ (tangente verticale au borne) avec $f(0) = f(1) = 0$.



2.2 Théorème des accroissements finis et applications

Proposition 9 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

> **Remarque:** Dans ce théorème, comme dans le théorème de Rolle, on a seulement la continuité sur le segment et la dérivabilité sur l'ouvert.

Corollaire 4 (Inégalité des accroissements finis, "première version")**.** *Soient f une fonction dérivable sur $[a,b]$, m et M 2 réels tel que $m \leq f' \leq M$ sur $[a,b]$, alors*

$$m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M.$$

On utilisera plus fréquemment une version un peu plus faible de ce corollaire :

Corollaire 5 (Inégalité des accroissements finis, "deuxième version")**.** *Soient f une fonction dérivable sur $[a,b]$, M un réel tel que $|f'| \leq M$ sur $[a,b]$, alors*

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leq M.$$

Définition 2. *Soient f une fonction définie sur I et $k \in \mathbb{R}^+$. La fonction f est dite k-lipschitzienne sur I, si pour tout $x, y \in I$, on a*

$$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|\,.$$

Remarque : On dit que la fonction f est lispchitzienne, si il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que la fonction f est k-lipschitzienne sur I.

Corollaire 6 (Dérivée et variations)**.** *Soit f une fonction dérivable sur I, alors on a :*

1. *Si la fonction f' est positive sur I, alors la fonction f est croissante.*
2. *Si la fonction f' est négative sur I, alors la fonction f est décroissante.*
3. *Si la fonction f' est nulle sur I, alors la fonction f est constante.*

Corollaire 7. *Soit f une fonction dérivable de dérivée positive (respectivement négative) sur I et tel que pour tout segment de longueur non nulle $[a,b]$, la restriction $f'_{|[a,b]}$ n'est pas identiquement nulle, alors la fonction f est strictement croissante (respectivement décroissante).*

> **Remarque:** La version faible de ce corollaire est généralement suffisante dans la pratique : **« Si la fonction f' s'annule qu'en un nombre fini de points sur I et est de signe fixe sur I, alors la fonction f est strictement monotone. »**

Proposition 10 (Théorème de limite de la dérivée)**.** *Soient $a \in I$, f une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$, on suppose que la fonction f' admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a, alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell.$$

On a alors 2 cas :

1. *$\ell = \pm\infty$, alors la fonction f n'est pas dérivable en a et la courbe de f admet une tangente verticale en a.*
2. *$\ell \in \mathbb{R}$, alors la fonction f est dérivable en a, de dérivée continue en a.*

Remarque: Ce théorème est technique à appliquer, il faut prouver les différents éléments dans le bon ordre avec les bons arguments.

Exemples:

1. Montrons que la fonction définie que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = \frac{t^2}{\text{ch}\,(t)-1}$ se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   (a) **Prolongement en 0 et continuité sur $\mathbb{R}$:**
   La continuité sur $\mathbb{R}^*$ est une application directe des règles usuelles de composition. Déterminons la limite en 0 de f. On a, par les développements limités usuels $\text{ch}\,(t) - 1 = \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$. On en déduit $\text{ch}\,(t) - 1 \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}\cdot$ On a donc

   $$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{\frac{t^2}{2}} = 2.$$

   On prolonge donc, par continuité, la fonction f par la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   La fonction $\tilde{f}$ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) **Limite de la dérivée et classe $\mathcal{C}^1$.**
   On a, par les règles usuelles, la fonction $\tilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Montrons que f' admet une limite en 0. On a

   $$f'(t) = \frac{2t(\text{ch}\,(t)-1) - t^2\text{sh}\,(t)}{(\text{ch}\,(t)-1)^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{2t(\text{ch}\,(t)-1) - t^2\text{sh}\,(t)}{\frac{t^4}{4}}\cdot$$

   Calculons un développement limité d'ordre 4 du numérateur, on a, par les développements limités usuels :

   $$\begin{aligned} \text{sh}\,(t) &= t + \underset{t\to 0}{o}(t^2) \\ t^2\text{sh}\,(t) &= t^3 + \underset{t\to 0}{o}(t^4) \end{aligned}$$

   et

   $$\begin{aligned} \text{ch}\,(t) - 1 &= \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^3) \\ 2t(\text{ch}\,(t)-1) &= t^3 + \underset{t\to 0}{o}(t^4), \end{aligned}$$

   d'où

   $$2t(\text{ch}\,(t)-1) - t^2\text{sh}\,(t) = \underset{t\to 0}{o}(t^4), \qquad \text{soit} \quad f'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\underset{t\to 0}{o}(t^4)}{\frac{t^4}{4}} = \underset{t\to 0}{o}(1).$$

   On conclut donc $\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = 0$. Comme $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que sa dérivée admet une limite en 0, le théorème de limite de la dérivée nous permet de conclure que $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et de dérivée continue en 0. On a donc $\tilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Le théorème de limite de la dérivée donne une condition suffisante d'existence de la

dérivée, mais pas nécessaire. Si on arrive à justifier que la dérivée n'admet pas de limite en un point a, cela nous permet seulement de dire que si la fonction est dérivable en a, la fonction dérivée n'est pas continue en ce point. Il faut revenir à la définition de la dérivée pour savoir si la fonction est dérivable.

Si on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

La fonction g est continue et dérivable par les règles usuelles sur $\mathbb{R}^*$ et sur $\mathbb{R}^*$ avec

$$g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

La fonction g' n'admet donc pas de limite en 0.

On a $|g(x)| \leq x^2$. Par le théorème des gendarmes, la fonction g admet une limite nulle en 0, elle est donc continue en 0.

On calcule le taux d'accroissement en 0 :

$$\left|\frac{g(x) - g(0)}{x - 0}\right| = \left|\frac{g(x)}{x}\right| = \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|.$$

Le théorème des gendarmes nous permet encore de conclure que

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0.$$

La fonction g est donc dérivable, mais la fonction g' n'est pas continue en 0.

3 Retour sur les développements asymptotiques et formule de Taylor-Young

Le but de paragraphe est de revenir sur le cours comparaisons locales de fonctions, on y démontre en particulier les résultats initialement admis en boîte noire.

3.1 Comparaisons locales de fonctions et développements limités

On reprendra le cours initial en particulier. La partie sur les opérations autorisés entre les relations de comparaison, l'unité du développement limité d'une fonction en un point et les manipulations opératoires sur les développements limités.

3.2 Formule de Taylor-Young

Lemme 2. *Soient f une fonction dérivable sur I, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, tel que*

$$f'(x) = \underset{x \to a}{o}((x-a)^n),$$

alors

$$f(x) - f(a) = \underset{x \to a}{o}((x-a)^{n+1}).$$

Proposition 11. *Soient f une fonction n fois dérivables sur I avec $n \geq 1$ et $a \in I$, alors*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n). \end{aligned}$$

Remarques:

1. Il n'y a pas de réciproque dans le cas général, on a une réciproque dans le cas $n = 1$. (cf. Proposition 2)
2. On se sert peu souvent de la formule de Taylor-Young pour calculer un développement limité pour le cas d'une fonction donnéee explicitement.
3. Elle donne une condition suffisante d'existence du développement limité d'une fonction, mais on calcule le développement limité en général d'une autre manière. (En utilisant les règles opératoires sur les développements limités, ou encore la méthode des indéterminées (cf. exemples sur les fonctions réciproques du prochain paragraphe)).
4. Si on a calculé un développement limité d'ordre n d'une fonction en un point a et qu'on a par ailleurs démontré que cette fonction est n fois dérivable, on peut utiliser l'unicité du développement limité et la formule de Taylor-Young pour obtenir les valeurs des dérivées.
   Exemple: Soit la fonction g définie sur $[-1,1]$ par $g(x) = \arcsin(x)$.
   On a g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. Calculons $g^{(2k+1)}(0)$.
   On obtient d'un cÙté en utilisant l'imparité de arcsin

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}),$$

   et de l'autre

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x^2)^k + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n}),$$

   où $\binom{a}{p} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k!}$, soit, comme $g(0) = 0$,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}).$$

   On conclut, par unicité du développement limité,

$$g^{(2k+1)}(0) = (2k)! \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k = \frac{(2k)!^2}{4^k (k!)^2}.$$

3.3 Exemples de calculs de développements limités par la méthode des indéterminées

3.3.1 Développement limité de la réciproque de la fonction $x \mapsto x + e^x - 1$ en 0

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + e^x - 1$.

On calcule sa dérivée $f'(x) = 1 + e^x > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par le théorème de la bijection, on a donc f bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et comme $\mathbb{R}$ est intervalle, sa réciproque est continue.

De plus, le fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ intervalle et sa dérivée ne s'annule pas, donc f^{-1} la réciproque de la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Gr,ce à la formule de Taylor-Young et la régularité de f^{-1}, f^{-1} admet un développement limité à tout ordre en tout point de $\mathbb{R}$. Calculons son développement limité d'ordre 3 en 0. On a

$$f^{-1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

Comme $f(0) = 0$, on a directement $a_0 = 0$. Puis, les développements limités usuels nous donnent

$$f(x) = 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

Par composition, on a

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Appliquons la règle de composition des développements limités. On a

$$a_1\left(2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + a_2\left(2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^2 + a_3\left(2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) = x + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

Soit

$$2a_1 x + \left(\frac{a_1}{2} + 4a_2\right)x^2 + \left(\frac{a_1}{6} + 2a_2 + 8a_3\right)x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) = x + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

Par unicité d'un développement limité, on a donc $2a_1 = 1$, $\frac{a_1}{2} + 4a_2 = 0$ et $\frac{a_1}{6} + 2a_2 + 8a_3 = 0$. On a donc $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{16}$ et $a_3 = \frac{1}{192}$. On conclut donc

$$\boxed{f^{-1}(x) = \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{16} + \tfrac{x^3}{192} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).}$$

3.3.2 Développement limité de la réciproque de la fonction $x \mapsto 2x + \ln(1+x)$ en $2 + \ln 2$

On considère la fonction g définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = 2x + \ln(1+x)$.

On calcule sa dérivée $g'(x) = 2 + \frac{1}{1+x} > 0$.

La fonction g est donc strictement croissante sur $]-1, +\infty[$ et on a

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus, le fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ intervalle et sa dérivée ne s'annule pas, donc g^{-1} la réciproque de la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,+\infty[$.

Gr,ce à la formule de Taylor-Young, gr,ce à la régularité de g^{-1}, g^{-1} admet un développement limité à tout ordre en tout point de $\mathbb{R}$. Calculons son développement limité d'ordre 2 en $2+\ln 2$. On a

$$g^{-1}(2+\ln 2+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2).$$

Comme $f(1) = 2+\ln 2$, on a directement $a_0 = 1$. Puis, les développements limités usuels nous donnent

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u^2).$$

On en déduit

$$g(1+x) = 2(1+x) + \ln(2+x) = 2 + \ln(2) + 2x + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) = 2 + \ln 2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Comme $g^{-1}(g(1+x)) = 1+x$, on en déduit par composition :

$$1 + a_1\left(\frac{5}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right) + a_2\left(\frac{5}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right)^2 + \underset{h\to 0}{o}(x^2) = 1+x,$$

soit

$$1 + x\frac{5}{2}a_1 + x^2\left(-\frac{1}{8}a_1 + \frac{25}{4}a_2\right) + \underset{h\to 0}{o}(x^2) = 1+x.$$

Par unicité d'un développement limité, on a $a_1 = \frac{2}{5}$, $a_2 = \frac{1}{125}$ et on conclut

$$\boxed{g^{-1}(2+\ln 2+h) = 1 + \tfrac{2}{5}h + \tfrac{1}{125}h^2 + \underset{h\to 0}{o}(h^2).}$$