Dénombrement

La construction axiomatique de $\mathbb{N}$ est hors programme. Pour la culture, on définit l'ensemble des entiers naturels noté $\mathbb{N}$, comme un ensemble totalement ordonné qui vérifie les 3 propriétés suivantes :

- L'ensemble $\mathbb{N}$ ne possède pas de plus grand élément.
- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ majoré possède un plus grand élément.

A partir de cette définition, on retrouve toutes les propriétés que l'on a commencée à découvrir en comptant sur ses doigts en maternelle jusqu'à l'addition et la multiplication des nombres entiers que l'on a appris au primaire.

1 Cardinal d'un ensemble fini

Les résultats de cette partie doivent être connus, bien que leurs preuves ne soit pas exigibles (des indications sont données ici, mais à titre informatif).

1.1 Ensembles finis

Définition 1. *Un ensemble E sera dit fini s'il existe une bijection entre E et $[\![1, n]\!]$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$.*

Remarque: Si E est un ensemble fini de cardinal n, alors en notant $x_i = \varphi(i)$, où φ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E, les x_i sont distincts, et on peut écrire $E = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Exercice 1. Montrer que l'ensemble des élèves de 861 est fini.

Il y a-t-il unicité de la bijection ? et de n tel que cet ensemble est en bijection avec $[\![1, n]\!]$?

Avec les notations de la définition 1, il est trop tôt pour déclarer n comme le cardinal de E : il faut d'abord établir l'unicité d'un tel n. Quel serait en effet le cardinal d'un ensemble en bijection avec $[\![1, 1515]\!]$ et $[\![1, 1789]\!]$?

1.2 Injections et surjections de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$

Proposition 1. *S'il existe une injection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$, alors $p \leq q$.*

Corollaire 1. *S'il existe une surjection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$, alors $p \geq q$.*

Corollaire 2. *S'il existe une bijection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$, alors $p = q$.*

Corollaire 3. *Si E est en bijection avec $[\![1, p]\!]$ et $[\![1, q]\!]$, alors $p = q$.*

1.3 Définition du cardinal d'un ensemble fini

Définition 2. *Soit E un ensemble fini. Grâce à la définition et aux résultats précédents, il existe un unique $N \in \mathbb{N}$ tel que E soit en bijection avec $[\![1, N]\!]$. Cet entier s'appelle le cardinal de E. On le note $|E|$, ou $\mathrm{card} E$ ou encore $\# E$.*

1.4 Quelques propriétés élémentaires

Le résultat suivant aura un analogue très important dans le chapitre sur les espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème 1. *Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal (c'est en particulier le cas si $E = F$) et f une application de E dans F. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est injective ;*
2. *f est surjective ;*
3. *f est bijective.*

Pour l'implication (2) $\Rightarrow$ (1), on pourra établir la contraposée après avoir montré les lemmes suivants :

Lemme 1. *Si A est fini et $f : A \to B$, alors $f(A)$ est fini et $|f(A)| \leq |A|$ (récurrence sur $|A|$).*

On montrera ensuite (1) $\Rightarrow$ (2) grâce au résultat suivant :

Lemme 2. *Si A est fini et $f : A \to B$ est injective, alors $|f(A)| = |A|$ (récurrence sur $|A|$).*

Les détails sont pour le lecteur...

Remarque: Les équivalences du théorème deviennent fausses, si on enlève l'hypothèse de cardinal fini, même si $E = F$. L'application $n \mapsto n + 1$ est une injection non surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors que $n \mapsto \max(n - 1, 0)$ établit une surjection non injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Proposition 2. *Soient E_1 et E_2 2 ensembles finies, alors $E_1 \times E_2$ est un ensemble fini et*

$$\mathrm{card}\,(E_1 \times E_2) = (\mathrm{card} E_1)\,(\mathrm{card} E_2)\,.$$

Corollaire 4. *Soient $(E_k)_{k\in[1,n]}$ une famille de n ensembles finies, alors $\prod_{k=1}^{n} E_k$ est un ensemble fini et*

$$\mathrm{card}\left(\prod_{k=1}^{n} E_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{card} E_k.$$

Proposition 3.
- *Si E_1 et E_2 sont deux ensembles finis* ***disjoints****, alors leur réunion est finie, de cardinal $|E_1| + |E_2|$.*
- *Si F est fini et $E \subset F$, alors E est fini de cardinal $\leq |F|$, avec égalité si et seulement si $E = F$.*

Corollaire 5. *Si A et A sont deux ensembles finis*

$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card} A + \mathrm{card} B - \mathrm{card} A \cap B.$$

Corollaire 6. *Soient E un ensemble fini et A une partie de E*

$$\mathrm{card}(\bar{A}) = \mathrm{card} E - \mathrm{card} A.$$

Corollaire 7. *Si $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille d'ensembles finis deux à deux disjoints*

$$\mathrm{card}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{card} A_k.$$

Les corollaires 4 et 6 serviront fréquemment pour déterminer des cardinaux d'ensembles et des relations de divisibilité entre cardinaux.

Il faut bien faire la différence entre les deux, dans un cas, on écrit l'ensemble E comme un produit d'ensembles $E = \prod_{k=1}^{n} E_k$ et dans l'autre, on partitionne l'ensemble $E = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, où la famille (A_k) une famille de parties de E deux à deux disjointes.

En particulier pour déterminer le cardinal d'un ensemble E, on utilisera le lemme 6 en découpant découpera souvent E une partition $(E_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$, tel que le cardinal de chaque E_k est facile à déterminer.

Exemple :

On lance successivement 3 fois un dé de 6, combien de série de lancers avec au plus 6.

1.5 Quelques cardinaux remarquables

Proposition 4. Lemme des bergers

(i) Soit E un ensemble tel qu'il existe une partition[1] *de E par N ensembles finis de cardinal commun k. Alors E est fini de cardinal Nk.*

(ii) Soit E un ensemble tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et une application $f : E \to F$, avec F fini, de sorte que tout $y \in F$ admet exactement k antécédents dans E par f. Alors E est fini, de cardinal $k\,|F|$.

Application :

Théorème 2 (Théorème de Lagrange sur les groupes)**.** *SI G est un groupe fini et H un sous-groupe de G, alors* $\mathrm{card}H$ *divise* $\mathrm{card}G$*.*

Proposition 5.
1. *Si E et F sont deux ensembles finis, l'ensemble des applications de E dans F est fini, de cardinal $|F|^{|E|}$.*
2. *Si E est un ensemble fini, alors $\mathcal{P}(E)$ est fini de cardinal $2^{|E|}$.*
3. *Si p et n sont deux entiers ≥ 1 le nombre d'injections de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, noté A_n^p, vaut $\frac{n!}{(n-p)!}$.*
4. *Si $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de bijections de $[\![1,n]\!]$ sur lui-même vaut $n!$*
5. *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq n$, le nombre de parties de $[\![1,n]\!]$ à k éléments, noté $\binom{n}{k}$, vaut $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.*

Remarque:

(i) On appelle un “arrangement sans répétition de p éléments de $[\![1,n]\!]$” un p-uplet $(x_1,\ldots,x_p)$ où les x_i sont des éléments distincts de $[\![1,n]\!]$. Cela correspond à une injection de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$; il y en a donc A_n^p.

(ii) Si E et F sont finis de cardinaux respectifs p et n, le nombre d'injections de E dans F est encore A_n^p.

(iii) Si E est fini de cardinal n, le nombre de parties de E est 2^n, alors que le nombre de bijections de E sur lui-même est $n!$

1. une partition de E est la donnée d'ensembles **disjoints** dont la réunion est E

Exercice 2. Déterminer le nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Exercice 3. Déterminer le nombre de surjections de $[\![1, n+2]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Exercice 4. Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux personnes parmi 40 aient la même date anniversaire ? On supposera que les dates anniversaires sont équiréparties parmi 365 dates possibles.

Evaluer à la calculatrice. Surpris ?

1.6 Coefficients binomiaux

On donne ici trois résultats élémentaires concernant les coefficients binomiaux. On verra plus tard des résultats "autour du binôme". Tout d'abord, on peut étendre la définition des $\binom{n}{k}$ aux cas où $k < 0$ ou bien $k > n$, en posant $\binom{n}{k} = 0$. $\binom{n}{k}$ reste d'ailleurs le nombre de parties à k éléments de $[\![1, n]\!]$ dans ces cas un peu dégénérés.

Proposition 6. *On a les formules suivantes :*

1. *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, n]\!]$, alors $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.*
2. *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.*
3. *Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.*

Remarque: Pour établir les formules sommatoires concernant les $\binom{n}{k}$, on s'efforcera, dans la mesure du possible, de donner des preuves combinatoires.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $\binom{2n}{n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.