Fonctions convexes

Exercice 1.

Soient $(p,q) \in]1,+\infty[^2$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q}$
2. Soient $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(y_k)_{1\leq k\leq n}$ deux familles de réels strictement positifs. En utilisant :

$$S_x = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}},\ S_y = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}},\ X_k = \frac{x_k}{S_x},\ Y_k = \frac{y_k}{S_y}$$

   montrer l'**inégalité de Hölder** :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Exercice 2.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application convexe et majorée. Montrer que f est constante.
2. A-t-on le même résultat si f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice 3. $\star$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application convexe.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ existe dans $\bar{\mathbb{R}}$. on note ℓ cette limite.
2. On suppose ici que ℓ est réelle et on note $g : x \to f(x) - \ell x$.
   (a) Montrer que g est convexe.
   (b) En déduire que g est décroissante.
   (c) En déduire enfin que g admet une limite en $+\infty$.
3. Interpréter ces résultats géométriquement.

Exercice 4.

1. Montrer que l'application $\left\{\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \ln\ln x \end{array}\right.$ est concave sur $]1,+\infty[$.
2. Montrer que : $\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2, \quad \sqrt{\ln(x)\ln(y)} \leq \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

Exercice 5. Montrer que pour tous $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Exercice 6.

1. Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \ln(1+e^x) \end{array} \right.$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tous $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \right)^{\frac{1}{n}}$$

3. En déduire que pour tous $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{2n}$

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} y_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k) \right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 7.

Soit f l'application définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{\ln x} & \text{si } x \in]0, 1[\end{array} \right.$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0, 1[$.
2. Etudier la convexité de f sur $[0, 1[$.
3. Montrer que f possède un point d'inflexion et préciser la tangente de f en ce point.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 8. $\star$ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ montrer que

$$\ln f \text{ est convexe} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \alpha > 0, \quad f^\alpha \text{ est convexe.}$$

Exercice 9. $\star\star$ [Concours B/L 2011] Soit A la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$A = \left\{ (x, f(x)) \quad | \quad x \in [0,1],\ f \text{ est une fonction 2 fois dérivable sur } [0,1] \text{ avec } \begin{array}{l} -1 \leq f' \leq 1, \\ -1 \leq f'' \leq 1, \\ f(0) = 0, f(1) = \dfrac{1}{2} \end{array} \right\}$$

Représenter A.

Exercice 10. $\star$ Soit I un intervalle ouvert.

1. (a) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que f est continue sur I et dérivable à gauche et à droite en tout point de I.
   (b) Si I n'est pas ouvert, ces résultats sont-ils conservés ?
2. Soit f une fonction convexe bijective de I sur un intervalle J.
   (a) Montrer que f est strictement monotone sur I.
   (b) En déduire que f^{-1} est convexe ou concave sur J.