Nombres complexes

Exercice 1. Soient $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, déterminer le module et un argument des complexes $e^{i\theta}+1$, $e^{i\theta}-1$ et $e^{i\theta}+e^{i\theta'}$.

Exercice 2. Soit a et b, deux complexes de même module non nul r.

a) Interpréter géométriquement les conditions $ab = r^2$ puis $ab = -r^2$.

b) On suppose désormais que $ab \neq r^2$ et $ab \neq -r^2$.

(i) Montrer que les complexes

$$z_1 = \frac{a+b}{r^2+ab} \text{ et } z_2 = \frac{a-b}{r^2-ab}$$

sont réels.

(ii) Soient α et β des arguments de a et b (respectivement). Exprimer $z = r\,z_1$ en fonction des cosinus de $\frac{\alpha+\beta}{2}$ et $\frac{\alpha-\beta}{2}$

(iii) Montrer que $z_1^2 + z_2^2 \geq \frac{1}{r^2}$.

(iv) Quels sont les cas d'égalité ?

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. $\sin(x) + \cos(x) = 1$.
2. $\cos(3x) = \sin(2x)$.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $e^z = 2j$.

Exercice 5.

a) Linéariser $\cos(x)^3 \sin(x)^2$.

b) Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(ky)^3 \sin(ky)^2.$$

Exercice 6. Donner une primitive des applications suivantes :

$$x \to \cos^6(x),\ x \to \sin^4(x),\ x \to \cos^3(x)\sin^2(x).$$

Exercice 7. Résoudre sur $\mathbb{R}$

$$\cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x) \cdots + \cos(11x) + \cos(13x) = 0.$$

Exercice 8. Calculer les expressions algébriques des réels $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

(On pourra se ramener à un calcul de racine carrée d'un complexe.)

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnues z :

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \tag{1}$$

$$z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0 \tag{2}$$

$$z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0 \quad \text{où } \theta \text{ est un réel fixé} \tag{3}$$

$$z^2 - e^{2i\theta}z + i\sin(\theta)\cos(\theta)e^{2i\theta} = 0 \quad \text{où } \theta \text{ est un réel fixé} \tag{4}$$

$$z^2 - 2iz + i\sqrt{3} = 0 \tag{5}$$

$$z^4 + z^2 + 1 = 0 \tag{6}$$

$$\overline{z^7} = \frac{1}{z^3} \tag{7}$$

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(1+iz)^n = (1-iz)^n .$$

Exercice 11. Soit $P(z) = z^6 - 2\cos(\theta)z^3 + 1$.

a) Résoudre $P(z) = 0$.
b) Décomposer $P(z)$ en produit de trinômes du second degré à coefficients réels.

Exercice 12. Déterminer les racines cinquièmes complexes de $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^3}$.

Exercice 13. $\star$ Simplifier

$$\prod_{p=2}^{n} \frac{p^3-1}{p^3+1}.$$

On pensera à utiliser $1, j$ et j^2.

Exercice 14. On pose $a = \cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$. Déterminer une expression simple de chacun des complexes A et B où

$$A = a + a^2 + a^4 \quad \text{et} \quad B = a^3 + a^5 + a^6.$$

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, calculer le produit des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1.

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on note pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\omega_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$. Calculer, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, la somme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p.$$

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression simple de chacune des sommes suivantes :

1. $P = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \binom{n}{2k}$; $I = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$
2. $A = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{3k}$; $B = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{3k+1}$; $C = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{3k+2}$.

Exercice 18. Soient $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1,0,1\}$ et A, A', M, M', P les points d'affixes respectives $1, -1, z, \dfrac{1}{z}, \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$. Démontrer que la droite (MM') est une bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PA'})$.

Exercice 19. Soient A, B, C trois points du plan affine euclidien, d'affixes respectives a, b, c.

1) Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.

2) En déduire que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si :

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0.$$

Exercice 20.

Caractériser géométriquement les similitudes suivantes et calculer leurs inverses :

(i) $z' = (1+i)z + 1$.
(ii) $z' = (1 - i\sqrt{3})z + \sqrt{3}$.
(iii) $z' = -z + 3 + i$.
(iv) $z' = 2z + 3 - i$.