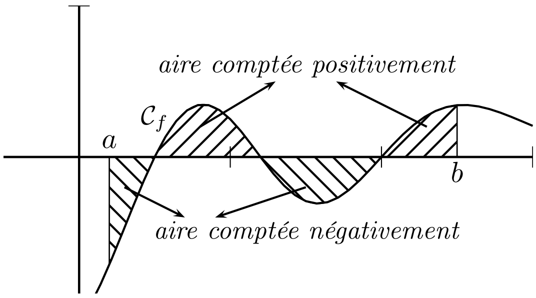
Introduction aux calculs de primitives

Dans la suite, I sera un intervalle de $\mathbb{R}$ et on notera $\mathbb{K}$ le corps de base de l'ensemble image (on pourra remplacer dans un énoncé donné par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1 Quelques résultats de base sur les intégrales et les primitives.

Les résultats de cette partie sont admis à ce moment de l'année, on les démontrera en partie dans les chapitres de dérivation et d'intégration.

Définition 1. *Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$, l'intégrale de f sur $[a,b]$ notée $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est l'aire algébrique entre l'axe des abscisses et la courbe de f sur le segment $[a,b]$. On compte positivement l'aire, si la courbe de f est au dessus de l'axe Ox et négativement sinon.*



On étend la définition de l'intégrale au cas $b < a$ par $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$.

Définition 2. *Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$, une fonction F est une primitive de f sur $[a,b]$, si la fonction F est dérivable est dérivable sur $[a,b]$ et $F' = f$.*

Proposition 1. *Soient f une fonction continue sur le segment $[a,b]$, F primitive de f sur $[a,b]$ et G une fonction dérivable sur $[a,b]$, alors il y a équivalence entre*

(i) G est une primitive de f sur $[a,b]$.

(ii) $G - F$ est une fonction constante sur $[a,b]$.

Théorème 1. *Soient f une fonction continue sur le segment $[a,b]$, alors f admet une unique primitive F sur $[a,b]$ s'annulant en c et on a*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Corollaire 1. *Soient f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et F un primitive de f sur $[a,b]$, alors on a*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Proposition 2. *Soient f une fonction continue sur $[a,b]$, α et β deux fonctions dérivable d'un intervalle I dans $[a,b]$ alors la fonction φ définie sur I par*

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

est dérivable sur I et $\varphi'(x) = \beta'(x)f(\beta(x)) - \alpha'(x)f(\alpha(x))$.

Définition 3. *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, si la fonction f est dérivable sur $[a,b]$ et la fonction f' est continue sur $[a,b]$.*

On généralise naturellement la dérivation aux fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes par la définition suivante, les différentes propositions se généralise sans difficulté (démonstrations laissées au lecteur) :

Définition 4. *Soit une fonction f définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, on dit f est dérivable sur $[a,b]$ sur $[a,b]$ si les fonctions* $\mathrm{Im}(f)$ *et* $\mathrm{Re}(f)$ *sont des fonctions dérivables sur $[a,b]$ et on a alors*

$$\forall x \in [a,b], \quad f'(x) = (\mathrm{Re}(f))'(x) + i\,(\mathrm{Im}(f))'(x).$$

2 Primitives usuelles et forme $u'f(u)$.

2.1 Primitives usuelles

Grâce à la dérivation des fonctions usuelles, on obtient le tableau suivant (on rappelle qu'il n'y a pas unicité et qu'il faut être sur intervalle) :

Expression	Primitive	Domaine de validité
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{C} \setminus -1)$	$\frac{1}{1+\alpha}x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	un intervalle de $\mathbb{R}^{+*}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1,1[$

2.2 Forme $u'f(u)$.

On rappelle la formule de dérivation d'une composée de fonctions :

Proposition 3. *Soient f un fonction une fonction dérivable sur $[a,b]$ à valeurs dans l'intervalle I et g une fonction dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors $g \circ f$ est dérivable sur $[a,b]$ à valeurs dans I et on a*

$$(g \circ f)' = g' \circ f \cdot f'.$$

Corollaire 2. *Soient u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ à valeurs dans l'intervalle I, f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et F une primitive de f sur I, alors $F(u)$ est une primitive de $u'f(u)$ sur $[a,b]$.*

Méthodes en découlant :

Les 2 premiers exemples sont à savoir appliquer directement. Pour les 3 suivants, il faut savoir détecter rapidement si l'expression apparaissant dans l'intégrande peut s'y ramener.

1. Soit $a \in \mathbb{C}^*$, alors $x \mapsto \frac{1}{a}e^{ax}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{ax}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ alors $x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sin(ax)$
3. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ et u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$, alors $x \mapsto \frac{1}{1+a}(u(x))^{a+1}$ est une primitive de $x \mapsto u'(x) \cdot (u(x))^a$.
   Exemples :
   (a) $x \mapsto -\frac{1}{4}\cos(x)^4$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sin(x)\cos^3(x)$.
   (b) $x \mapsto \frac{1}{5}\ln(x)^5$ est une primitive sur $\mathbb{R}^{*+}$ de $x \mapsto \frac{\ln(x)^4}{x}$.
4. Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^*$, alors $x \mapsto \ln\lvert u(x)\rvert$ est une primitive sur $[a,b]$ de $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$.
   Exemples :

(a) $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$.

(b) Soit I un intervalle sur lequel la fonction cos ne s'annule pas, alors

$$\boxed{x \mapsto -\ln|\cos(x)| \text{ est une primitive de tan sur } I.}$$

5. Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, alors $x \mapsto \arctan u(x)$ est une primitive sur $[a,b]$ de $x \mapsto \frac{u'(x)}{1+\left(u(x)\right)^2}$.

Exemples :

(a) $2\arctan\left(\dfrac{1}{2}x+2\right)$ est une primitive de $\frac{1}{(\frac{1}{2}x+2)^2+1}$.

(b) On a $\frac{1}{\mathrm{ch}\,(x)} = \frac{2}{e^x+e^{-x}} = \frac{2e^x}{1+e^{2x}} = 2\dfrac{(e^x)'}{1+(e^x)^2}$.

On en déduit que

$$\boxed{2\arctan(e^x) \text{ est une primitive de } \frac{1}{\mathrm{ch}\,(x)}.}$$

3 Utilisation des complexes

3.1 Utilisation de la linéarisation

On reverra, dans le chapitre sur les nombres complexes, l'application des complexes à la trigonométrie en particulier l'utilisation des formules d'Euler :

Proposition 4. *Pour tout réel x, on a*

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

3.2 Utilisation de l'exponentielle complexe

Pour primitiver des expressions de la forme $\cos(ax)e^{bx}$ (ou $\sin(ax)e^{bx}$), la manière la plus simple est de primitiver $e^{(ia+b)x}$ puis de passer à la partie réelle (ou imaginaire).

Exemples :

1. Calculons une primitive de $\sin(3x)e^{2x}$. $\frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)x}$ est une primitive de $e^{(2+3i)x}$. On calcule la partie imaginaire :

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)x}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{2-3i}{13}e^{(2+3i)}\right) = \frac{2\sin(3x)e^{2x}}{13} - \frac{3\cos(3x)e^{2x}}{13}$$

On conclut que

$$\boxed{\frac{2\sin(3x)-3\cos 3x}{13}e^{2x} \text{ est une primitive de } \sin(3x)e^{2x}.}$$

2. Calculons une primitive de $\cos^2(x)e^x$. La première étape est de linéariser $\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$. On a $\cos(2x)e^x = \mathrm{Re}(e^{(1+2i)x}$. Comme $\frac{1}{1+2i}e^{(1+2i)x}$ est une primitive de $e^{(1+2i)x}$. On calcule

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+2i}e^{(1+2i)x}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-2i}{5}e^{(1+2i)x}\right) = \frac{\cos(2x)+2\sin(2x)}{5}e^x.$$

On peut donc conclure que

$$\boxed{\frac{\cos(2x)+2\sin(2x)}{10}e^x + \frac{1}{2}e^x \text{ est une primitive de } \cos^2(x)e^x.}$$

4 Intégration par parties

Proposition 5. *Soient u et v 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors on a*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t,$$

oô $[u(t)v(t)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Remarques :

1. Faire attention au caractère $\mathcal{C}^1$ des fonctions.
2. On utilise souvent l'intégration par parties pour simplifier les termes à intégrer.
3. On peut aussi utiliser une intégration par partiespour obtenir une relation de récurrence.

Méthodes en découlant :

1. Forme $P(x)e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et P un polynôme.
   On dérive le polynôme (donc son degré va baisser) et on intègre l'exponentielle (ce qui ne change pas sa forme). Il faut réitérer le procédé jusqu'à obtenir un degré 0 pour le polynôme.
   (a) Calcul d'une primitive de xe^x :
   Effectuons l'intégration par parties$\left\{\begin{array}{ll} u'(t) = e^t & u(t) = e^t \\ v(t) = t & v'(t) = 1. \end{array}\right.$
   On a alors
   $$\int_0^x te^t\mathrm{d}t = \left[te^t\right]_0^x - \int_0^x e^t\mathrm{d}t = xe^x - \left[e^t\right]_0^x = xe^x - e^x + 1.$$
   Comme les primitives sont définies à une constante près, on en déduit que
   $$\boxed{xe^x - e^x \text{ est une primitive de } xe^x}$$
   .
   (b) Calcul d'une primitive de $x^2\sin(x)e^{2t}$:
   En passant en complexe, on a $x^2\sin(x)e^x = \mathrm{Im}\left(x^2e^{(2+i)x}\right)$.
   Effectuons l'intégration par parties$\left\{\begin{array}{ll} u'(t) = e^{(2+i)t} & u(t) = \frac{1}{2+i}e^{(2+i)t} \\ v(t) = t^2 & v'(t) = 2t. \end{array}\right.$
   On a alors
   $$\int_0^x t^2e^{(2+i)t}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2+i}e^{(2+i)t}\right]_0^x - \int_0^x \frac{2t}{2+i}e^{(2+i)t}\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2+i}e^{(2+i)x} - \frac{2}{2+i}\int_0^x te^{(2+i)t}\mathrm{d}t.$$
   On réitère avec l'intégration par parties$\left\{\begin{array}{ll} u'(t) = e^{(2+i)t} & u(t) = \frac{1}{2+i}e^{(2+i)t} \\ v(t) = 2t & v'(t) = 2. \end{array}\right.$.
   On a alors
   $$\int_0^x te^{(2+i)t}\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2+i}e^{(2+i)t}\right]_0^x - \frac{1}{2+i}\int_0^x e^{(2+i)t}\mathrm{d}t = \frac{x}{2+i}e^{(2+i)x} - \frac{1}{(2+i)^2}\left(e^{(2+i)x} - 1\right).$$
   On en déduit que
   $$\frac{x^2}{2+i}e^{(2+i)x} - \frac{2}{2+i}\left(\frac{x}{2+i}e^{(2+i)x} - \frac{e^{(2+i)x}}{(2+i)^2}\right) = \left(\frac{2-i}{5}x^2 - \frac{6-8i}{25}x + \frac{4-22i}{125}\right)e^{(2+i)x}$$
   est une primitive de $x^2e^{(2+i)x}$. En passant à la partie imaginaire, on conclut
   $$\boxed{\left(-\frac{1}{5}x^2 + \frac{8}{25}x - \frac{22}{125}\right)\cos(x)e^{2x} + \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{6}{25}x + \frac{4}{125}\right)\sin(x)e^{2x} \text{ est une primitive de } x^2\sin(x)e^{2x}.}$$

(c) Relation de récurrence, soit la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 t^n e^t \mathrm{d}t$.

On calcule $u_0 = \int_0^1 e^t \mathrm{d}t = e - 1$.

Puis par l'intégration par parties$\left\{\begin{array}{ll} u'(t) = e^t & u(t) = e^t \\ v(t) = t^{n+1} & v'(t) = (n+1)t^n. \end{array}\right.$, on obtient

$$u_{n+1} = \left[t^{n+1}e^t\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 t^n e^t \mathrm{d}t = e - (n+1)u_n.$$

On conclut donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ vérifie } u_0 = e - 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e - (n+1)u_n.}$$

(d) On remarque que cette méthode nous permet de dire que toute expression de la forme $P(x)e^{\alpha x}$ avec P polynôme de degré n et $\alpha \in \mathbb{C}^*$ admet une primitive de la forme $Q(x)e^{\alpha x}$ avec Q polynôme de degré n. (Faire n intégrations par parties...).

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on peut donc directement chercher la primitive sous la forme $Q(x)e^{\alpha x}$ avec $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$.

Cherchons une primitive de $f(x) = x^4 e^{2x}$, on peut donc la chercher sous la forme $F(x) = (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)e^{2x}$. On calcule

$$\begin{aligned} F'(x) = (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d)e^{2x} + 2(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)e^{2x} \\ = (2ax^4 + (2b + 4a)x^3 + (2c + 3b)x^2 + (2d + 2c)x + 2e + d)e^{2x}. \end{aligned}$$

Par identification, on a donc

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2a & = & 1 \\ 2b + 4a & = & 0 \\ 2c + 3b & = & 0 \\ 2d + 2c & = & 0 \\ 2e + d & = & 0 \end{array}\right.$$

Soit $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = \frac{3}{2}$, $d = -\frac{3}{2}$ $e = \frac{3}{4}$, on conclut

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right)e^{2x} \text{ est une primitive de } x^4 e^{2x}.}$$

2. Forme $P(x)f(x)$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et f une fonction transcendante de type ln (pas de formule de calcul algébrique des valeurs $\ln x$, mais les valeurs de la dérivée se calculent algébriquement, principalement : ln, arctan, arcsin et arccos)

On primitive le polynôme et on dérive f (ce qui simplifie sa forme). Il faut réitérer le procédé jusqu'à obtenir une forme uniquement avec une expression algébrique par rapport à la variable.

(a) Calcul d'une primitive de $\ln x$:

Comme $\ln x = 1 \cdot \ln x$, effectuons l'intégration par parties$\left\{\begin{array}{ll} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = \ln t & v'(t) = \frac{1}{t}. \end{array}\right.$

On a alors

$$\int_1^x \ln t \mathrm{d}t = [t \ln t]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} \mathrm{d}t = x \ln x - [t]_1 x = x \ln x - x + 1.$$

On conclut

$$\boxed{x \ln x - x \text{ est une primitive de } \ln x.}$$

(b) Calcul d'une primitive de $(\ln x)^2$: Comme $(\ln x)^2 = 1 \cdot (\ln x)^2$, effectuons l'intégration par parties$\begin{cases} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = (\ln t)^2 & v'(t) = \frac{2\ln t}{t}. \end{cases}$

On a alors

$$\int_1^x (\ln t)^2 \mathrm{d}t = \left[t(\ln t)^2\right]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{2\ln t}{t} \mathrm{d}t = x(\ln x)^2 - 2\int_1^x \ln t \mathrm{d}t.$$

En utilisant le calcul précédent, on conclut

$$\boxed{x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x \text{ est une primitive de } (\ln(x))^2.}$$

(c) Calcul d'une primitive de $x \arctan x$:

Effectuons l'intégration par parties$\begin{cases} u'(t) = t & u(t) = \frac{t^2}{2} \\ v(t) = \arctan t & v'(t) = \frac{1}{1+t^2}. \end{cases}$

On a alors

$$\int_0^x t \arctan t \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} \arctan t\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} \mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} \mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^2+1-1}{1+t^2} \mathrm{d}t = \int_0^x 1 \mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = x - \arctan x.$$

On conclut

$$\boxed{\frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{\arctan x}{2} \text{ est une primitive de } x \arctan x.}$$

5 Fractions rationnelles de la forme $\frac{at+b}{ct^2+dt+f}$

On suppose $c \neq 0$ (le cas $c = 0$ se ramène à une forme déjà connue) et on peut donc par division par c se ramener à la forme $\frac{\alpha t+\beta}{t^2+\delta t+\gamma}$.

On se place sur I de $\mathbb{R}$ sur lequel le dénominateur ne s'annule pas, on peut écrire.

$$\frac{\alpha t+\beta}{t^2+\delta t+\gamma} = \frac{\alpha}{2} \frac{2t+\delta}{t^2+\delta t+\gamma} + \left(-\frac{\alpha\delta}{2} + \beta\right) \frac{1}{t^2+\delta t+\gamma}.$$

Comme $\frac{\alpha}{2} \ln\left|t^2+\delta t+\gamma\right|$ est une primitive de $\frac{\alpha}{2} \frac{2t+\delta}{t^2+\delta t+\gamma}$, il suffit donc de calculer une primitive de $\frac{1}{t^2+\delta t+\gamma}$.

Il faut alors distinguer selon le nombre de racines réelles du polynôme $X^2 + \delta X + \gamma$.

1. Cas de 2 racines réelles distinctes $X^2 + \delta X + \gamma = (X - x_1)(X - x_2)$ avec $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ et $x_1 \neq x_2$. On décompose en éléments simples sous la forme (on admet l'existence et l'unicité d'une telle décomposition) :
$$\frac{1}{t^2+\delta t+\gamma} = \frac{A}{t-x_1} + \frac{B}{t-x_2}$$

   Exemple :
   Calcul d'une primitive de $\frac{t}{t^2-6t+8}$, sur un intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$:
   On applique la première étape :
$$\frac{t}{t^2-6t+8} = \frac{1}{2} \frac{2t-6}{t^2-6t+8} + \frac{3}{(t-4)(t-2)}.$$

   Déterminons A, B tel que

$$\forall t \in I, \quad \frac{1}{(t-4)(t-2)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-4}.$$

En multipliant par $(t-2)$, on a

$$\frac{1}{(t-4)} = A + \frac{B(t-2)}{t-4}$$

en spécialisant en $t = 2$, on obtient $A = -\frac{1}{2}$.
De nouveau en multipliant par $(t-4)$, on a

$$\frac{1}{(t-2)} = \frac{A(t-4)}{t-2} + B$$

en spécialisant en $t = 4$, on obtient $B = \frac{1}{2}$. On a donc

$$\forall t \in I, \quad \frac{1}{(t-4)(t-2)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t-2} + \frac{1}{t-4}\right).$$

On a en déduit que $-\frac{1}{2}(\ln|t-2| - \ln|t-4|)$ est une primitive de $\dfrac{1}{t^2-6t+8}$. On conclut donc

$$\boxed{\tfrac{1}{2}\ln(t^2-6t+8) + \tfrac{3}{2}(-\ln|t-2| + \ln|t-4|) = \ln\left|\frac{(t-4)^2}{t-2}\right| \text{ est une primitive de } \tfrac{t}{t^2-6t+8}.}$$

2. Cas d'une racine réelle double $X^2 + \delta X + \gamma = (X - x_1)^2$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$.
   On a directement une forme $u' \cdot u^{-2}$:
   Exemple :
   Calcul d'une primitive de $\frac{2}{t^2-6t+9} = \frac{2}{(t-3)^2}$, on conclut directement :

$$\boxed{-\tfrac{2}{t-3} \text{ est une primitive de } \tfrac{2}{t^2-6t+9} \text{ (faire attention au domaine de définition.)}}$$

3. Cas de 2 racines complexes conjuguées distinctes, on a donc, en mettant sous forme canonique :

$$X^2 + \delta X + \gamma = \left(X + \frac{\delta}{2}\right)^2 + \gamma - \frac{\delta^2}{4},$$

   avec $\gamma - \frac{\delta^2}{4} > 0$. Il faut transformer l'expression pour faire apparaître une dérivée de arctan.
   Exemple :
   Calculer une primitive de $\frac{2t+1}{t^2+4t+13}$.
   On applique la première étape :

$$\frac{2t+1}{t^2+4t+13} = \frac{2t+4}{t^2+4t+13} - \frac{3}{t^2+4t+13}.$$

   Puis

$$\frac{1}{t^2+4t+13} = \frac{1}{(t+2)^2+9} = \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{3}}{\left(\dfrac{t+2}{3}\right)^2+1}.$$

   On en déduit que $\frac{1}{3}\arctan\left(\dfrac{t+2}{3}\right)$ est une primitive $\frac{1}{t^2+4t+13}$. On conclut donc

$$\boxed{\ln(t^2+4t+13) - \arctan\left(\frac{t+2}{3}\right) \text{ est une primitive de } \tfrac{2t+1}{t^2+4t+13}.}$$

6 Changement de variables

Proposition 6. *Soient f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans I, alors on a*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\mathrm{d}y.$$

Remarque : Les hypothèses de régularité sont assez fortes, mais dans la pratique, elles seront en générale facile à vérifier. Il n'y a pas de table de changement de variables à connaître, dans les sujets de concours, soit il découlera naturellement de la lecture du problème, soit il sera donné. Par contre, il faut savoir l'appliquer rapidement.

Exemple : Calculons $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ en effectuant le changement de variable $t = \sin(y)$. On calcule $\mathrm{d}t = \cos(y)\mathrm{d}y$ et on remarque que $\sin(0) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, on a donc, en utilisant le formulaire trigonométrique,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \int_{\sin(0)}^{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2(y)}\cos(y)\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{6}} |\cos(y)|\cos(y)\mathrm{d}y.$$

Comme pour $y \in [0, \frac{\pi}{6}]$, on a $\cos(y) \geq 0$, on en déduit

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(y)\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}\left(\cos(2y)+1\right)\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{4}\sin(2y) + \frac{1}{2}y\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}.$$

On conclut

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}.}$$