

Intégrales et primitives

Le but de cette liste d'exercices est d'acquérir une grande partie des techniques pour calculer une primitive. La première technique est de connaître son tableau de primitives usuelles pour savoir les reconnaître. Pour les changements de variables, on pourra les chercher, mais ce n'est pas une priorité, ils sont donnés dans les indications. Pour les primitives, on précisera, à chaque fois, le domaine de validité.

On a noté avec des * les calculs un peu plus "technique" !

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes en effectuant un changement de variable :

$$\begin{aligned} 1) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-t^2} dt & \quad 2) \int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt & \quad 3) \int_1^e \frac{dt}{t+t(\ln t)^2} \\ 4) \int_0^1 \frac{dt}{e^t+1} & \quad 5) \int_1^2 \frac{\ln(1+t) - \ln t}{t^2} dt \end{aligned}$$

Exercice 2.

Calculer les intégrales suivantes grâce à une intégration par parties :

$$1) \int_0^1 \ln(1+t^2) dt \quad 2) \int_1^e t^n \ln t dt \quad 3) \int_0^{1/2} \arcsin t dt \quad 4) \int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) dt$$

Exercice 3. Linéarisation (ou plus simple)

Calculer les primitives de

$$1) \cos^3 t \quad 2) \sin^4 t$$

Exercice 4. Changement de variable

Calculer les primitives de

$$1) \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} \quad 2) \frac{\ln t}{t + t(\ln t)^2} \quad 3) \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos t}}$$

Exercice 5. Intégration par parties

Calculer les primitives de

$$\begin{aligned} 1) (t^2 - t + 3)e^{2t} & \quad 2) (t^3 - t^2 + 2t - 3) \sin t & \quad 3) t^3 \cos t \quad \text{et} \quad t^3 \sin t \\ 4)^* (t + 3)e^t \cos(3t) & \quad 5)^* (\ln t)^2 \end{aligned}$$

Exercice 6. Fractions rationnelles

Calculer les primitives de

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{t^5}{1+t^{12}} & 2) \frac{1}{t^2-2t+2} & 3) \frac{1}{t(t^2-1)} \\ 4) \frac{t+1}{t^2-t+1} & 5) \frac{1}{t^2(t+1)} & 6)** \frac{1}{t^3+1} \end{array}$$

Exercice 7. Fractions rationnelles en sin et cos

Calculer les primitives de

$$1) \frac{\cos^3 t + \cos^5 t}{\sin^2 t + \sin^4 t} \quad 2) \frac{\sin^3 t}{2 + \cos t} \quad 3) \frac{1}{\cos t(\sin t - \cos t)} \quad 4)** \frac{1}{2 + \cos t}$$

Indications :

Exercice 1.

- 1) $t = \sin(u)$.
- 2) $u = \sqrt{t}$.
- 3) $u = \ln t$.
- 4) $u = e^t$.
- 5) $u = \frac{1}{t}$.

Exercice 4.

- 1) $u = \sqrt{t}$.
- 2) $u = \ln t$.
- 3) $u = \cos t$.

Exercice 6.

6) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{a}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2-t+1}.$$

Exercice 7.

- 1) $u = \sin t$.
- 2) $u = \cos t$.
- 3) $u = \tan t$.
- 4) $u = \tan \frac{t}{2}$.